Analisi Matematica II, Anno Accademico 2014-2015.
Ingegneria Edile, Civile, Ambientale

Paolo Acquistapace, Laura Cremaschi, Vincenzo M. Tortorelli

APPUNTI Lezione del 27 Novembre 2014.

LE NOTAZIONI PER LE FORMULE DI TAYLOR IN PIÙ VARIABILI

DERIVATE DIREZIONALI ITERATE

Se $v \in \mathbf{R}^d$ è non nullo è definito *l'operatore differenziale di derivazione* rispetto a v, che associa ad una funzione f di d variabili la sua eventuale derivate direzionele lungo v:

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) f\right)(x) \;=\; \frac{\partial f}{\partial v}(x) =: \lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv)-f(x)}{t}\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial \rho v}(x) = \rho\frac{\partial f}{\partial v}(x)\,,\ \rho \neq 0.$$

Se una funzione f è differenziabile in x si ha: $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial v}(x) \;=\; d_x f\, v \;=\; \langle \nabla f(x), v\rangle \;=\; \sum_{i=1}^{d} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$

Se $g(t) =: f(x+tv)$ si ha per la regola della catena: $\displaystyle g'(t) \;=\; \frac{\partial f}{\partial v}(x+tv) \;=\; (v\cdot\nabla) f(x+tv).$

Si osserva che si ottiene *un polinomio omogeneo di primo grado*, cioè un *funzione lineare omogenea*, nelle variabili $v_1,\dots,v_d$ delle coordinate di v. Nel caso si usa la notazione:

$$\frac{\partial}{\partial v} \;=\; v\cdot\nabla\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial v}(x) \;=\; v\cdot\nabla f(x) \;=\; (v\cdot\nabla) f(x).$$

Per le funzioni due volte differenziabili si può iterare questo tipo di derivata :

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) f\right)\right)(x) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)(x) \;=\; \frac{\partial}{\partial v}\left(\sum_{i=1}^{d} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^{d} v_i \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} v_i v_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, x_i}(x)$$

cioè, denotando con $Hf(x)$ la matrice Hessiana delle derivate parziali seconde in x:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)(x) \;=\; \langle v, Hf(x)v\rangle \;=\; {}^t v\cdot Hf(x) v.$$

Si osserva che si ottine un *polinomio omogeneo di secondo grado*, cioè *una quadrica omogenea* nelle d variabili $v_1,\dots,v_d$ che danno le coordinate di v.

Si useranno quindi anche le notazioni:

$$\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial}{\partial v} = \left(\frac{\partial}{\partial v}\right)^2 \;=\; \frac{\partial^2}{\partial v^2} \;=\; (v\cdot\nabla)^2.$$

Se si definisce $g(t) =: f(x+tv)$ si ha per la regola della catena:

$$g''(t) \;=\; \left(\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial}{\partial v} f\right)(x+tv) \;=\; \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(x+tv) \;=\; (v\cdot\nabla)^2 f(x+tv).$$

Iterando h volte si useranno le notazioni:

$$\frac{\partial}{\partial v} \cdots \frac{\partial}{\partial v} \;=\; \left(\frac{\partial}{\partial v}\right)^h \;=\; \frac{\partial^h}{\partial v^h} \;=\; (v \cdot \nabla)^h .$$

Se si definisce $g(t) =: f(x + tv)$ si ha per la regola della catena iterata h volte :

$$\frac{d^h g}{dt^h}(t) \;=\; \left(\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)^h f\right)(x + tv) \;=\; \frac{\partial^h f}{\partial v^h}(x + tv) \;=\; (v \cdot \nabla)^h f(x + tv).$$

Anche in questo caso si ottiene un *polinomio omogeneo di grado* h, nelle d variabili $v_1, \ldots, v_d$ che danno le coordinate di v.

Per metter in evidenza la natura polinomiale, nelle coordinate della direzione, di queste derivate direzionali successive conviene usare anche le notazioni relative ai multi-indici.

MULTINDICI

(Libro P. Acquistapace Vol. 1, cap. 4.8 pagg. 263-268)

Un vettore $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_d) \in \mathbf{N}^d$ a componenti intere non negative, si dice *d-multi-indice*

La dimensione d si dice *lunghezza* del multi-indice.

Si dice *peso* o *norma* (è in effetti la norma l^1): $\quad |\mathbf{p}| = \sum_{i=1}^{d} p_i$.

Dati due multindici di egual lunghezza si scrive $\mathbf{q} \le \mathbf{p}$ per $q_1 \le p_1$, $\ldots$, $q_d \le p_d$.

Si definiscono inoltre: $\quad \mathbf{p}! = p_1! \cdot \ldots \cdot p_d!$, $\quad \binom{\mathbf{p}}{\mathbf{q}} = \binom{p_1}{q_1} \cdot \ldots \cdot \binom{p_d}{q_d}$, $\quad \mathbf{p} \le \mathbf{q}$.

La relazione con i monomi è chiarita dalla seguente convenzione: se $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^d$ si definisce:

$$\mathbf{v}^{\mathbf{p}} \;=:\; v_1^{p_1} \cdot \ldots v_d^{p_d}.$$

Quindi la relazione con le derivate e i multi-indici è messa in evidenza dalle seguenti notazioni:

$$D^{\mathbf{p}} \;=\; D_1^{p_1} D_2^{p_2} \ldots D_d^{p_d} \;=\; \frac{\partial^{|\mathbf{p}|}}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{p}}} \;=:\; \frac{\partial^{|\mathbf{p}|}}{\partial x_1^{p_1} \ldots \partial x_d^{p_d}}$$

Lemma: $$\frac{\partial^h f}{\partial \mathbf{v}^h}(x^0) = (\mathbf{v} \cdot \nabla)^h f(x^0) \;=\; h! \sum_{|\mathbf{p}|=h} \frac{1}{\mathbf{p}!} \; \frac{\partial^h f}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{p}}}(x^0) \;\; \mathbf{v}^{\mathbf{p}} \;=$$

$$=\; h! \sum_{p_1+\ldots+p_d=h} \frac{1}{p_1! \ldots p_d!} \; \frac{\partial^h f}{\partial x_1^{p_1} \ldots \partial x_d^{p_d}}(x^0) \;\; v_1^{p_1} \ldots v_d^{p_d}.$$

Il polinomio di Taylor di grado k e centro $\mathbf{x}^0$ si può pertanto scrivere come segue:

$$P_k(\mathbf{x}) \;= \sum_{h=0}^{k} \frac{1}{h!} \; \frac{\partial^h f}{\partial (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^h}(x^0) \;=\; \sum_{h=0}^{k} \frac{1}{h!} \; ((\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \nabla)^h f(x^0) \;=$$

$$= \sum_{h=0}^{k} \sum_{|\mathbf{p}|=h} \frac{1}{\mathbf{p}!} \; \frac{\partial^h f}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{p}}}(x^0) \;\; (\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^{\mathbf{p}} \;=\; \sum_{|\mathbf{p}|=0}^{k} \frac{1}{\mathbf{p}!} \; \frac{\partial^{|\mathbf{p}|} f}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{p}}}(x^0) \;\; (\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^{\mathbf{p}} \;=\; \sum_{|\mathbf{p}|=0}^{k} \frac{1}{\mathbf{p}!} D^{\mathbf{p}} f(x^0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^{\mathbf{p}}.$$