

Analisi Matematica II, Anno Accademico 2014-2015.

Ingegneria Edile, Civile, Ambientale

Paolo Acquistapace, Laura Cremaschi, Vincenzo M. Tortorelli

FOGLIO DI ESERCIZI n. 1, dal 2 Ottobre al 8 Ottobre 2014

ESERCIZIO n. 1 Determinare e rappresentare graficamente il dominio di definizione D delle seguenti funzioni:

a) $f(x, y) = \sqrt{\frac{x^2+21y^2-10xy}{x+4y}}$, $f : D \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$;

b) $f(x, y, z) = \log \frac{x^2+y^2-1}{x+y+z}$, $f : D \subset \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$;

c) $f(x, y, z) = \left(\arctan \frac{x+y-z}{y(x^2-4)}, \arcsin(x^2 - y^2 - z^2) \right)$ $f : D \subset \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$.

d) $f(t) = (\cos 2t + 2 \cos t, 2 \sin t, \sin 2t)$, $f : D \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$

ESERCIZIO n. 2 a) Quale delle funzioni del precedente esercizio è limitata?

b) Quale è iniettiva?

c) Quale surgettiva?

ESERCIZIO n. 3 Per le seguenti funzioni si disegnino gli insiemi di livello

$\{(x, y) : f(x, y) = 1\}$, $\{(x, y, z) : f(x, y, z) = 1\}$.

a) $f(x, y) = x^2 + y^2$;

b) $f(x, y) = |x| + |y|$;

c) $f(x, y) = \max\{|x|, |y|\}$;

d) $f(x, y) = (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}}$ al variare di $p > 1$;

e) $f(x, y) = (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}}$ al variare di $p \in]0; 1[$;

f) $f(x, y, z) = |x| + |y| + |z|$;

g) $f(x, y) = \log(e \cdot \arctan(x^2 + y^2 - 4))$.

ESERCIZIO n. 4 Si dia un'idea saliente del comportamento dei grafici delle seguenti funzioni:

a) $f(x, y) = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y$.

b) $g(x, y) = (f(x, y))^4$.

c) $h(x, y) = xy^2$.

ESERCIZIO n. 5 Si consideri in \mathbf{R}^3 un nuovo sistema di riferimento dato dalla base $B = ((1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1))$. Si consideri quindi la terna $(1, 2, 3)$ nell'usuale sistema di coordinate per la base $A = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$.

a) Si esprimano le coordinate (X, Y, Z) nella base B in termini delle coordinate usuali.

b) Quali sono le coordinate in B della posizione individuata da $(1, 2, 3)$?

c) Quali sono le coordinate in B del vettore individuato da $(1, 2, 3)$?

d) Quali sono le coordinate in B del covettore individuato da $(1, 2, 3)$?

e) Quali sono le coordinate in B del 2-vettore individuato da $(1, 2, 3)$?

f) Quali sono le coordinate in B della funzione bilineare antisimmetrica (2-covettore) individuata da $(1, 2, 3)$?

ESERCIZIO n. 6 Data $f(x, y, z) = (X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z)) =: (x^3, y^3, z^3)$

a) La funzione è bigettiva da \mathbf{R}^3 in sé. Se nel sistema di coordinate usuale un punto corrisponde a $(1, 2, 3)$ quali sono le coordinate nel sistema non lineare (X, Y, Z) ?

b) Si consideri la curva (retta parametrica) $\gamma(t) = t(1, 2, 3)$ nell'usuale sistema di coordinate. Qual'è la velocità nel nuovo sistema di coordinate?

c) Si consideri il lavoro compiuto dalla forza espressa nelle coordinate (X, Y, Z) dalla terna costante $(1, 2, 3)$ su una generica curva, espressa, sempre in questo sistema di coordinate, da $A(t) = (U(t), V(t), W(t))$. Nelle coordinate usuali (x, y, z) come si esprime il lavoro di questa forza lungo una curva espressa nelle stesse da $a(t) = (u(t), v(t), w(t))$?

ESERCIZIO n. 7 In \mathbf{R}^3 vi è qualche retta per l'origine, identificata dal suo piano ortogonale Π di equazione $ax + by + cz = 0$, rispetto alla quale il sostegno (immagine) della curva $\gamma(s) = (s + s^4, s - s^4, s + s \sin s)$ sia grafico di una funzione $f : \mathbf{R} \rightarrow \Pi$?

ESERCIZIO n. 8 Si trovi, come luogo di zeri, il piano tangente al grafico della funzione $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$ nel punto $(1, 1, e^2)$.

ESERCIZIO n. 9 Si considerino le due curve $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$ e $\beta(t) = (\cos t, 2 \sin t, 3t)$. Calcolare la derivata rispetto a t della curva $\alpha(t) \times \beta(t)$.

ESERCIZIO n. 10 Si consideri $f(x, y) = (X(x, y), Y(x, y)) =: (y - x^2, y - e^{2x} - 2x)$

a) La funzione è bigettiva da \mathbf{R}^2 in sé?

b) Si disegnino gli insiemi di livello di $X + Y$.

ESERCIZIO n. 11 Si consideri $f(x, y) = (X(x, y), Y(x, y)) =: (x^3 - y, y^3 + x)$, $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$.

a) Si verifichi che f è iniettiva e surgettiva.

b) Si disegnino i generici insiemi di livello delle funzioni X ed Y componenti della funzione vettoriale f .

ESERCIZIO n. 12 a) Trovare i valori di massimo e minimo, se esistono, della funzione $f(x, y) = \log(x + y)$ sul cerchio di centro l'origine e raggio 2.

b) Trovare i valori di massimo e minimo, se esistono, della funzione $f(x, y) = \log(x + y)$ sulla circonferenza di centro l'origine e raggio 2.

ESERCIZIO n. 13 Trovare i valori di massimo e minimo, se esistono, della funzione $f(x, y, z) = |x - yz|$ sul cubo $[0, 1]^3 = \{(x, y, z) : 0 \leq x, y, z \leq 1\}$.

ESERCIZIO n. 14 Trovare una parametrizzazione per l'intersezione dei grafici delle funzioni $f(x, y) = 3 - x^2 - 2y^2$ e $g(x, y) = x^2 + y^2$.

ESERCIZIO n. 15 Si trovino, se esistono, i punti di massimo e minimo assoluto sulla sfera unitaria di centro l'origine della funzione distanza dalla retta $t(1, 2, 3) + (4, 5, 6)$.