Analisi Matematica II, Anno Accademico 2014-2015.
Ingegneria Edile, Civile, Ambientale

Paolo Acquistapace, Laura Cremaschi, Vincenzo M. Tortorelli

FOGLIO DI ESERCIZI n.2, dal 10 Ottobre al 16 Ottobre 2014

Gli esercizi contrassegnati con • sono piú impegnativi.

ESERCIZIO n.1 Si disegnino in maniera approssimativa i sottoinsiemi dal piano definiti da $\Big\{(x,y)\in \mathbf{R}^2\ :\ f(x,y)=f(a,b)\ \Big\}$ al variare di f e di (a,b), nei casi seguenti:

x^2-y^2, $(2,-1)$; y^3-x^2, $(0,0)$; $(y-x^2)^2-x^5$, $(0,0)$; $\frac{x-y}{x+y}$, $(1,1)$; $\cos\frac{x}{y}$, $(\pi,4)$;
e^{xy}, $(2,0)$; $\frac{x}{x^2+y^2}$, $(1,2)$; $|x|+|y|$, $(1,0)$; $\max\{|x|,|y|\}$, $(1,0)$; $|x|^p+|y|^p$, $p\in\mathbf{R}^+$, $(1,0)$;

ESERCIZIO n. 2 Si disegnino in modo approssimativo i sottoinsiemi di $\mathbf{R}^3$:

$\{(x,y,z):\ 2=3x+5y+7z\}$;
$\{(x,y,z):\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+z^2=121\}$; $\{(x,y,z):\ (2x-10)^2+9y^2+z^2\geq 111\}$;
$\{(x,y,z):\ x=z^2+y^2\}$; $\{(x,y,z):\ x+y+z=2x^2+2y^2+4z^2-4zx-4zy\}$;
$\{(x,y,z):x^2-y^2=z\}$; $\{(x,y,z):x^2+y^2-z^2\leq 1\}$; $\{(x,y,z):x^2+y^2-z^2\leq -1\}$;
$\{(x,y,z):\ x^2-4y^2=9z^2\}$; $\{(x,y,z):\ 2z^2=x^2+y^2\}$;
$\{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2-6\sqrt{x^2+y^2}+5=0\}$; $\{(x,y,z):\sqrt{x^2+y^2}=\cosh z\}$;
$\{(x,y,z):\ |x|+|y|+|z|=1\}$; $\{(x,y,z):\ \max\{|x|,|y|,|z|\}\leq 1\ \}$.

ESERCIZIO n.3 Si studi l'immagine delle seguenti funzioni:
$t\in\mathbf{R}\mapsto(\sin 2t,\cos 2t), t\in\mathbf{R}\mapsto(t^2,t^3), t\in\mathbf{R}\mapsto(t\cos t,t\sin t), t\in\mathbf{R}\mapsto(\cos t,\sin t,t)$,
$t\in[2;3[\mapsto(t+1,2t+3,3t+4),\ (s,t)\in\mathbf{R}^2\mapsto(s,t,s+t),\ (s,t)\in\mathbf{R}^2\mapsto(s,t,s^2+t^2)$.

ESERCIZIO n. 4 a- La funzione $f(x,y)=\binom{x-yx}{2xy}$ da $\mathbf{R}^2$ in se è iniettiva? È surgettiva?
b- Sia $f(x,y)=\binom{x^2+y^2}{2xy}=(u,v)$: si studi l'immagine di f, si studi al variare di (u,v) come sono fatte le fibre $f^{-1}\{(u,v)\}$.

ESERCIZIO n. 5 Tra le seguenti implicazioni si provino quelle valide e si trovi un controesempio per ognuna di quelle false:

1. $\exists \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \implies \exists\ \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y).$
2. $\exists\ \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) \implies \exists \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y).$
3. $\left\{\begin{array}{l}\exists\ \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=\lambda_1\\ \exists\ \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)=\lambda_2\\ \exists\ \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=\lambda_3\end{array}\right. \implies \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3.$

ESERCIZIO n.6 - Si consideri lo spazio vettoriale delle funzioni continue reali definite su un intervallo. Si mostri che $f\mapsto\sqrt{\int_a^b|f(t)|^2dt}$ è una norma su tale spazio.
- Si mostri che il rapporto tra la norma $f\mapsto\max|f|$ e $f\mapsto\sqrt{\int_a^b|f(t)|^2dt}$ non può essere limitato al variare di f.

ESERCIZIO n. 7 Siano $d : X \times X \to \mathbf{R}^+$, $\rho : X \times X \to R^+$, $\delta : Y \times Y \to \mathbf{R}^+$, distanze sull'insieme X e sull'insieme Y. Si discuta quale delle seguenti funzioni è ancora una distanza.

$d_1(a,b) = \frac{d(a,b)}{1+d(a,b)}$; • $d_2(a,b) = \text{artan}(d(a,b))$; $d_3(a,b) = \min\{d(a,b), 1\}$;

$d_4((a,\alpha),(b,\beta)) = \max\{d(a,b); \delta(\alpha,\beta)\}$; $d_5((a,\alpha),(b,\beta)) = (d(a,b)^2 + \delta(\alpha,\beta)^2)^{\frac{1}{2}}$;

•$d_6(a,b) = \Psi(d(a,b))$, Ψ concava, non negativa, nulla in 0 ; $d_7(a,b) = \chi_{]0;+\infty[}(d(a,b))$.

(Con χ_A si indica la funzione che vale 1 su A e 0 sul complementare di A.)

• ESERCIZIO n.8 Studiare la continuità delle seguenti funzioni tra spazi normati:

a) $Id : (C^1[0;1], \int |f| + \int |f'|) \to (C[0;1], \sup |f|)$

b)$P : (C[0;1], \int |f|) \to (C[0;1], \sup |f|)$, ove Pf è la funzione $x \mapsto \int_0^x f^2(s)ds$.

c) $Id : (C[0;1], \sup |f|) \to (C[0;1], \int |f|)$,

d) $Id : (C[0;1], \int |f|) \to (C[0;1], \sup |f|)$

e) $Id : (C[0;1], \int |f|) \to \left(C[0;1], \sqrt{\int |f|^2}\right)$

f) $\frac{d}{dx} : (C^1[0;1], \sup |f|) \to (C[0;1], \int |f|)$

g) $\frac{d}{dx} : (C^1[0;1], \int |f| + \int |f'|) \to (C[0;1], \sup |f|)$

ESERCIZIO n.9 Siano V e W due spazi normati con norme $|\cdot|_V$ e $|\cdot|_W$. Data una funzione lineare $L : V \to W$ si definisce: $\|L\| =_{def} \sup_{v \in V \setminus (0)} \frac{|Lv|_W}{|v|_V}$.

a- Si Provi che se V e W hanno dimensione finita allora $\|A\|$ è sempre finito.

b- Si provino comunque le seguenti eguaglianze

$$\|L\| = \sup_{|v|_V = 1} |Lv|_W = \sup_{0 < |v|_V \le 1} \frac{|Lv|_W}{|v|_V} = \sup_{0 < |v|_V \le 1} |Lv|_W.$$

c- Quindi si provi che le funzioni lineari L da V in W per cui $\|L\|$ è finita formano uno spazio vettoriale, e che $\|\cdot\|$ è una norma su tale spazio.

ESERCIZIO n.10 Si calcolino le norme, definite nel precedente esercizio, delle seguenti funzioni lineari:

$$L(x,y) = ax + by \ ; \quad L(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ ; \quad x \in \mathbf{R}^n \mapsto Ax \in \mathbf{R}^n, \ {}^tAA = I \ ;$$

$$L(f) = \int_0^1 f(y)dy \in \mathbf{R} = W, \ f \in C([0;1]) = V, |f|_C = \max_{0 \le x \le 1} |f(x)| \ ;$$

$$L(f) = \int_0^x f(y)dy \in C([0;1]) = W, f \in C([0;1]) = V = W, \ |f|_C = \max_{0 \le x \le 1} |f(x)|.$$

ESERCIZIO n.11 a- Se A è una matrice $n \times n$ si provi, con la notazione dei precedenti esercizi, che $\|A\|^2 = \|{}^tAA\|$. Si mostri che non sempre $\|A\|^2 = \|A^2\|$.

b-Se si identifica una matrice $n \times n$ con un vettore di $\mathbf{R}^{n^2}$ che relazione ha con $\|A\|$ l'usuale norma euclidea $|A|_{n^2}$?

ESERCIZIO n. 12 Si studi l'esistenza dei limiti nei domini delle seguenti funzioni, al variare di eventuali parametri, e quando possibile se ne calcoli il valore:

$$\frac{xy}{x^2+y^2};\ \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2};\ x^2\log(x^2+y^2);\ \frac{x\sin y}{y\sin x};\ \tfrac{x^2y^2}{x^2+y^4};\ \tfrac{\sin(x|y|)}{x^2+|y|};\ \tfrac{e^{x^2y}-x\sin(xy)-1}{(x^2+y^2)^2}:\ (x,y)\to(0,0);$$

$$\frac{x+y}{3x+2y};\ \frac{x^3+y^2}{x^2y^2};\ \frac{x^3+y^2}{x^3+y^3};\ \frac{y^2+x+y}{x^2+x+y};\ \frac{x^2y^2}{|x|^\alpha+|y|^\alpha}:\ (x,y)\to(0,0)\ ;$$

$$\frac{y}{x^2-y}:\ (x,y)\to(0,0);\ \frac{y}{x^2-y}:\ (x,y)\underset{|y|\le|x|}{\to}(0,0);$$

$$x-y^2:\ x^2+y^2\to\infty;\ x-y^2:\ x^2+y^2\underset{2y^2\le x}{\to}\infty;\ \frac{x^2+y}{x^2+y^2+2xy}:\ x^2+y^2\to\infty;$$

$$\frac{x^2y+x^2z+y^2z}{x^2+y^2+z^2};\frac{xy+xz+yz}{x^2+y^2+z^2};\frac{x^2+y^2+z^2}{x^4+y^4+z^4};x^4+y^4-xyz-z^2y;x^4+y^4+z^4-xyz:$$
$$x^2+y^2+z^2\to+\infty;$$

$$\frac{\log xy}{(x-1)^2+(y-1)^2}:(x,y)\to(1,1);$$

$$\bullet\frac{x^\alpha y^\beta}{x^2+y^4},\ \frac{x^\alpha+y^\beta}{x^2+y^4}:\ (x,y)\to(0,0),\ \ \alpha,\ \beta>0.$$

ESERCIZIO n.13 Si studi la continuità delle seguenti funzioni:

$$f(x,y)=\int_0^y g(t,x)dt,\ \ g\in\mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2);$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases};\ f(x,y)=\begin{cases}xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases};$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{y^2}{x^3}e^{-\frac{y^2}{x^4}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases};\ f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^3}{x^2+y^6} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases};$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy-\sin xy}{x^6+y^6} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases};\ f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

ESERCIZIO n. 14 Si dica se la seguenti funzioni assumono valore massimo o assumono valore minimo sui domini rispettivamente specificati:

a- $f(x,y)=\int_{\sqrt{\log(1+y^4)}}^{x^2} e^{t^2}dt\ ,\quad D=\{|x|,|y|\le 1\}$

b- $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+4y^2}+x\ , & xy>0\\ xy+x\ , & xy\le 0\end{cases},\ D=\{0\le y\le 1,\ y^2-1\le x\le 1\}.$

• c- $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2,\ \ D=\{(z+1)^2-y^2-(x+3)^2=0,\ z^2+y^2-(x+1)^2=0\}$

ESERCIZIO n. 15 (Criterio di CONVERGENZA TOTALE) Sia $(f_k)_{k\in\mathbf{N}}$ una successione in uno spazio di Banach $(F, \|\cdot\|)$. Si mostri che se

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} \|f_n\| \ < +\infty$$

allora la successione $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ converge nello spazio di Banach $(F, \|\cdot\|)$.

ESERCIZIO n. 16 Per $k \in \mathbf{N}$ si definisca $f_k(x) = \frac{1}{k}\left(\text{artan}(kx+k) - \text{artan}x\right)$, $x \in \mathbf{R}$.
a- Per quali $x \in \mathbf{R}$ la successione di numeri $(f_k(x))_{k\in\mathbf{N}}$ è convergente?
b- Su quali intervalli la successione $(f_k)_{k\in\mathbf{N}}$ converge uniformemente?
c- Per quali $x \in \mathbf{R}$ la serie numerica $\sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ converge?
d- Su quali intervalli la serie di funzioni $\sum_{k=0}^{n} f_k$ converge uniformemente?

ESERCIZIO n. 17 Si provi che la successione di funzioni: $f_n(x) \ = \ (\sin(nx))^{2n}$, $x \in [0; 2\pi]$, non converge in tutti i punti del dominio. Si studi la convergenza verso zero delle successioni numeriche date dai seguenti integrali:

$$\int_0^{2\pi} f_n(x)dx \ , \quad \int_0^{2\pi} nf_n(x)dx.$$

ESERCIZIO n. 18 Si dica per quali $x \in \mathbf{R}$ quali le seguenti successioni convergono puntualmente, e su quali intervalli convergono uniformemente come successioni di funzioni:

$$x^n \ ; \quad nx^n \ ; \quad \frac{1}{1+x^{2n}}; \ \frac{n^2}{1+x^{2n}}; \ \frac{1}{1+(x-n)^2} \ ; \quad \min\{n; \frac{1}{x^2}\} \ ; \quad \frac{(1+x^2)^{n+1}-1}{(1+x^2)^n} \ ; \quad \frac{1}{x^n+nx} \ ;$$

$$\sin\frac{x}{n}; \ \sin\frac{x^n}{1+x^{2n}} \ ; \ n^2xe^{-nx} \ ; \quad n^{\sqrt{x}}e^{-\frac{n}{x}} \ ; \quad e^{-n(e^{-nx})} \ ; \quad x^{\sqrt{n}}e^{-\frac{x}{n}} \ ; \quad |n+x|^{n+x} \ ; \quad e^{-nx}\log nx \ ;$$

$$(\sin x)^n \ ; \ \left(\frac{1}{n}+\sin^2 x\right)^n \ ; \ \int_1^n \frac{e^{-xy}}{1+y^2}dy \, .$$

ESERCIZIO n. 19 Si dica in quali punti $x \in \mathbf{R}$ le seguenti serie di funzioni convergono puntualmente, e in quali intervalli convergono uniformemente, totalmente:

$$\sum_n \frac{1}{1+x^n} \ ; \quad \sum_n \frac{1}{x^n+nx}, \ x>0 \ ; \quad \sum_n \frac{x^3}{1+x^{2n}} \ ; \quad \sum_n \frac{x^n}{1-x^n}; \ \sum_n \sin\frac{x}{2^n} \ ; \quad \sum_n \frac{\sin nx}{n^2}$$

$$\sum_n n(\sin x)^n; \ \sum_n \int_1^{\infty} e^{-xny^2}dy; \ \sum_n \left(\text{artan}(nx+n) - \text{artan}nx\right); \quad \bullet \ \sum_n \frac{1}{n+(x-n)^2}, \ x \in \mathbf{R}.$$

$$\sum_n \frac{\log(1+nx)}{nx^n} \ , \quad \sum_n \frac{a^n}{n^x} \ (a>1) \ , \quad \sum_n \frac{a^n}{n^x} \ (a<1) \ , \quad \sum_n x^{n^2}a^n \ , \quad \sum_n \frac{\log n}{n^x}$$

ESERCIZIO n.20 a- Si studi la convergenza puntuale delle successioni elencate.
b- Se ne studi anche la convergenza uniforme per $n \to +\infty$ su: i domini di definizione, sulle palle aperte, chiuse e sui loro complementari.

$$\frac{2^n(x+y)}{1+n2^n(x^2+y^2)} \ ; \qquad \sum_{k=1}^{n} e^{k(\mathcal{R}ez - \frac{z}{2}+1)} \ z \in \mathbf{C} \ ; \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{|x-y|^k}{k!}\log(k+x^2+y^2)$$

$$f_n(x,y) = \frac{1}{x^n+y^n+ny}, \ x,y>0 \ , \quad S_n(x,y) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x,y) \ , \quad \sum_n \sup f_n.$$

ESERCIZIO n.21 a- Si studi su quali intervalli le successioni di funzioni elencate convergono uniformemente.
b- Se ne studi anche la convergenza rispetto alle altre norme o distanze indicate.

$e^{-n(e^{-nx})}$, $\int_{-\infty}^{0} |f|$; $\left(\frac{1}{n} + \sin^2 x\right)^n$, $\int_0^{2\pi} |f|$;

$e^{-nx} \log nx$, $\int_0^{+\infty} |f|$; $\sin \frac{x^n}{1+x^{2n}}$, $\int |f|$.

ESERCIZIO n. 22 Per quali $x \in \mathbf{R}$ la successione numerica : $f_n(x) = \dfrac{n^2 \sin^2\left(\frac{x}{n}\right)}{1 + n^2 \sin^2\left(\frac{x}{n}\right)}$ converge? Su quali intervalli la successione di funzioni f_n converge uniformemente?

ESERCIZIO n. 23 Per $n \in \mathbf{N}$ si definisca:

$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{x^3(\cos x)^n}{1-\cos x} & x \neq 0 \\ \\ 0 & x = 0 \end{cases} , \qquad x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

a- Per quali $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ la successione numerica $(g_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ converge ? Per quali la serie $\sum_n g_n(x)$?
b- La successione di funzioni converge in norma L^1? In norma L^2?
c- Su quali intervalli contenuti in $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ la successione di funzioni $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformemente? E la serie di funzioni $\sum_n g_n$?

• ESERCIZIO n.24 Si studi la convergenza puntuale ed uniforme sui sottoinsiemi dei domini specificati delle successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, e detto f il limite si studi la convergenza puntuale ed uniforme e totale della serie $\sum_n (f_n - f)$:

$$\begin{cases} f_0(x) = 1 \ , \quad x \in [0;1] \\ \\ f_{n+1}(x) = \sqrt{x f_n(x)} \end{cases} \qquad \begin{cases} f_0(x) = \cos x \ , \quad x \in \mathbf{R} \\ \\ f_{n+1}(x) = \cos\left(f_n(x)\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} f_0(x) \ , \quad x \in [0;A] \\ \\ f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(y)dy \end{cases}$$

ESERCIZIO n. 25 Dopo aver giustificato che le integrande sono integrabili si calcolino gli integrali giustificando la risposta: $\displaystyle\int_{\log 2}^{\log 3} \left(\sum_n n e^{-nx}\right) dx$, $\displaystyle\int_0^{\infty} \left(\sum_n \frac{1}{4^n + x^2}\right) dx$.