Analisi Matematica II, Anno Accademico 2014-2015.
Ingegneria Edile, Civile, Ambientale

Paolo Acquistapace, Laura Cremaschi, Vincenzo M. Tortorelli

FOGLIO DI ESERCIZI n. 3, dal 22 Ottobre al 31 Ottobre 2014

Gli esercizi contrassegnati con • sono piú impegnativi.

Per ulteriori esercizi relativi ai primi elementi di calcolo differenziale vettoriale si veda tra gli altri: P.Acquistapace, Vol. 1 cap. 4.2 Esempi ed Esercizi, cap. 4.4 Esercizi, cap. 4.5 Esempi ed Esercizi, Esercizi da 4.6.5 a 4.6.8; Courant-John, Vol.2 ch.1.1-1.8, A.4, 3.1-3.5.

ESERCIZIO n.1 a- Calcolare le derivate prime delle seguenti funzioni nei punti $(2,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,2,3)$ rispetto ad ognuna delle variabili:

$$e^{x^4y^2z} - xz\sin(xy) - 1; \quad \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}; \quad \frac{\sin(xyz)}{x^2+y^2+z^2}; \quad (x^2+z^2)\log(x^2+y^2); \quad \frac{x\sin zy}{200+zy\sin x}; \quad \frac{x^2y^2}{x^2+y^4+1}.$$

b- Calcolare quindi le funzioni derivate rispetto alla prima variabile delle stesse funzioni.

ESERCIZIO n. 2 Si scriva la matrice Jacobiana delle seguenti funzioni: $x+2y+3z$; $(x+2y+3z,-x)$; $(x+2y+3z, x^2-y^3+z^4)$; $(e^{x+y+z+w}, \sin(x+\log(1+y^2+w^6)-z), xyzw)$.

ESERCIZIO n. 3 Si studino la continuità, la derivabilità nelle diverse direzioni, e la differenziabilità delle seguenti funzioni:

$$\sqrt{|xy|}; \quad \sqrt{|x|}\cos y; \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}; \quad f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases};$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x}e^{-\frac{y^2}{x^2}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}; \quad \int_0^y f(t,x)dt, \ f\in\mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2);$$

• ESERCIZIO n. 4 Sia $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$. a - Si provi che f è continua su $\mathbf{R}$.

b - Si provi che le derivate di f in $\mathbf{R}\setminus\{0\}$ sono del tipo funzione razionale moltiplicato f.

c - Si provi che f è derivabile infinite volte in $x=0$.

d- Si studi se la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x^3}e^{-\frac{y^2}{x^4}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$.

ha derivate parziali in ogni punto e si studi la differenziabilità in $(0,0)$.

NOTA - per una funzione $\gamma : t\mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}^3$ (o $\mathbf{R}^2$) le cui componenti sono derivabili, il vettore "velocità " dato dalle derivate all'istante t_0 se non nullo da la direzione tangente alla curva descritta dal cammino γ nel punto $\gamma(t_0)$.

- per una funzione $f : (x,y,z)\mapsto f(x,y,z)$ differenziabile in $P=(x_0,y_0,z_0)$, se non nullo il vettore delle derivate parziali valutate in P $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(P), \frac{\partial f}{\partial y}(P), \frac{\partial f}{\partial z}(P),\right)$ è ortogonale nel punto P all'insieme di livello $\{(x,y,z): \ f(x,y,z)=f(P)\}$.

ESERCIZIO n. 5 Sia $f : \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}$ differenziabile ovunque e sia x_0 tale che $\nabla f(x_0) \neq 0$. Dimostrare che la direzione u rispetto a cui:
$\frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{x_0} = \max\left\{ \frac{\partial f}{\partial v}\Big|_{x_0} : \ v \in \mathbf{R}^n, \|v\| = 1 \right\}$ è data da $u = \frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}$.

ESERCIZIO n. 6 - Si trovi la tangente nel punto $(1,1)$ dell'insieme di punti del piano definito da $x^7 + y^7 - 2 = 0$

- Si trovi l'angolo di incidenza in $(1,1)$ tra le due curve $y = x$, $y = x^2$.

- Si calcolino seno e coseno dell'angolo di incidenza in $(1,1)$ tra le due curve (x^3, x^7), (x^5, x^9).

- Si trovi la normale nel punto $(1,1,2)$ alla superifice immagine di
$(u,v) \mapsto (v\cos u, v\sin u, v^2), \ v > 0$

• - Si trovino le tangenti nel punto $(0,0)$ dell'insieme del piano definito da $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$.

- Si trovi il piano tangente alla sfera di centro $(1,1,1)$ e raggio 1 in $(1, \frac{1}{2}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2})$.
- Si trovi la retta ortogonale alla regione $\{(x,y,z) : \ \log(x^2 + y^2 + e) = e^z\}$ in $(0,0,1)$.

- Si trovi il tangente nel punto $(1,1,-1)$ dell'insieme di punti definito da $x^7 + 2y^7 + z^7 - 2 = 0$ e $x^5 + 2y^5 + z^3 - 2 = 0$

• - Si trovino le tangenti nel punto $(0,0,0)$ dell'insieme definito da $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2(x^2 - y^2 - z^2)$ e $x - y^2 - z^2 = 0$.

- Si calcoli l'angolo di incidenza che formano le seguenti coppie di regioni dello spazio incontrandosi nei punti rispettivamente indicati:

$\{(x,y,z) : \ 2x^4 + 3y^3 - 4z^2 = -4\}$, $\{(x,y,z) : \ 1 + x^2 + y^2 = z^2\}$, $(0,0,1)$;
$\{(x,y,z) : x^2 + y^2 = e^z\}$, $\{(x,y,z) : x^2 + z^2 = e^y\}$, $(1,0,0)$;
$\{(x,y,z) : \ xy = z \ \}$, $\{(x,y,z) : \ \cos(2\pi xy) = z\}$, $(1,1,1)$.

ESERCIZIO n. 7 Si disegnino le curve $2y^2 - x(x-1)^2 = 0$ e • $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$, • $x^3 + y^3 - 3axy$, $a > 0$.

ESERCIZIO n. 8 - Per la curva in $\mathbf{R}^3$ $t \mapsto (\cos t, \sin t, t), \ 0 \leq t \leq 2\pi$ la tangente non è mai parallela al segmento tra i due estremi
• - Si mostri che in una curva piana differenziabile ogni corda ha una direzione tangente parallela (si usi opportunamente il determinante e il teorema di Rolle).

• ESERCIZIO n. 9 Sia $f \in C^1(A)$, con A aperto. Dimostrare che f é positivamente omogenea di grado α (i.e. $f(tx) = t^\alpha f(x)$ per ogni $x \in A$) se e solo se $\alpha f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f_{x_i}(x)$.

ESERCIZIO n. 10 Dato $C \subseteq \mathbf{R}^2$ si definisce la funzione distanza da C come segue:

$$d_C(x,y) \ = \ \inf_{(a,b)\in C} \sqrt{|x-a|^2 + |y-b|^2}$$

Si descrivano, nei seguenti casi, le regioni del piano ove d_C é differenziabile:
(a) $C = \{(0,0)\}$; (b) $C = \{(-1,0),(0,1)\}$; • (c) $C = \{(-1,0)\} \cup \{(1,b) : b \in \mathbf{R}\}$; • (d) $C = \{(-1,0)\} \cup \{(a,b) : (a+1)^2 + b^2 = 1\}$.

ESERCIZIO n. 11 Sia $f : \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}$ differenziabile ovunque e sia $F : \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ definita da: $F(\rho, \varphi) = f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$. Verificare che: $(F_\rho(\rho,\varphi))^2 + \frac{1}{\rho^2}(F_\varphi(\rho,\varphi))^2 = (f_x(x,y))^2 + (f_y(x,y))^2$ dove $x = \rho\cos\varphi$ e $y = \rho\sin\varphi$.

- Sia $f : \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}$ differenziabile ovunque e sia $F : \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ definita da: $F(R, \varphi, \theta) = f(R\cos\theta\cos\varphi, R\cos\theta\sin\varphi, R\sin\theta)$. Si calcolino le derivate di F in funzione di quelle di f.

- Sia $g : [0; +\infty[\mapsto \mathbf{R}$ derivabile e sia $f(x,y,z) =: g(x^2+y^2+z^2)$. Si provi che $f : \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}$ è differenziabile e si calcoli il gradiente di f esprimendolo in coordinate cartesiane e in coordinate sferiche.

ESERCIZIO n. 12 Data una funzione differenziabile due volte $f(x,y)$ sia $g = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$. Considerando il cambio di coordinate $(u,v) = (x, \frac{x}{\sqrt{y}})$, si esprima $g(x,y)$ in funzione di u e v e delle derivate rispetto alle variabili (u,v).

ESERCIZIO n. 13 Si consideri la funzione $f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Si provi che non è due volte differenziabile in $(0,0)$.

ESERCIZIO n. 14 Si provi che $(\varphi, z) \mapsto (R\cos\frac{\varphi}{R}, R\sin\frac{\varphi}{R}, z)$ conserva i prodotti scalari tra le velocità di cammini (e quindi l'angolo e il modulo).

ESERCIZIO n. 15 Sia $T : \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}^2$ una rotazione, cioè una applicazione lineare del tipo $x \mapsto Rx$, con $R = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.
Detto $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, dimostrare che: $\Delta(u \circ R) = (\Delta u) \circ R$ per ogni $u \in C^2$.

ESERCIZIO n.16 Si esprima $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ rispetto alle coordinate polari.

ESERCIZIO n. 17 Si identifichi lo spazio M delle matrici $n \times n$ con $\mathbf{R}^{n^2}$, ordinando in modo lessicografico gli elementi delle matrici.

a) Si verifichi che con questa identificazione il prodotto scalare tra due matrici A e B come elementi di $\mathbf{R}^{n^2}$ è dato da $trA \cdot {}^tB$ (ove $\cdot$ indica il prodotto righe per colonne, ${}^tB$ la matrice trasposta di B, e trC la traccia di una matrice quadrata C).

b) Sia $t \mapsto A(t)$ una funzione regolare da $]-1;1[$ in M tale che $A(0) = A$ e $A'(0) = I$, ove I è la matrice dell'identità. Si trovi lo sviluppo di Taylor del primo ordine di $A(t)$ in $t = 0$.

• c) Se $\Sigma = \{f(A) = 1\}$ si provi che i vettori $X \in M$ tangenti ad $A \in \Sigma$ sono quelli per cui $tr\ A^{-1} \cdot {}^tX = 0$.

• d) Si consideri la funzione $f : \mathbf{M} \mapsto \mathbf{R}$ definita da $f(A) = \det A$. Si dimostri se $f(A) \neq 0$: $\nabla f(A) = (\det A)\, A^{-1}$

e) Si consideri la funzione $f : \mathbf{M} \mapsto \mathbf{R}$ definita da $f(A) = \det A$. Si dimostri che :
$d_A f[H] = tr(\,{}^t cof A \cdot H)$

ove $(-1)^{i+j}(cofA)_{i,j}$ = determinante del minore di A ottenuto cancellando la i-esima riga e la j-sima colonna.

• ESERCIZIO n. 18 a- Si provi che una trasformazione lineare da $\mathbf{R}^2$ a valori in $\mathbf{R}^2$ o in $\mathbf{R}^3$ conserva gli angoli tra vettori se e solo se i trasformati della base canonica sono ortogonali e di egual lunghezza.
b- Si deduca che una trasformazione differenziabile f tra due aperti del piano conserva gli angoli tra i vettori tangenti di curve incidenti in un punto P se e solo se $D_p f$ conserva gli angoli tra vettori.

NOTA: Ad una funzione $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ del tipo $F(x,y) = (f(x,y), g(x,y))$ si associa la funzione $\tilde{F}$ da $\mathbf{C}$ in se: $z = x + iy$, $\tilde{F}(z) = f(x,y) + ig(x,y)$.
Tra le funzioni con derivate parziali vi sono quelle che ammettono derivata in senso complesso $\lim_{h\to 0,\ h\in\mathbf{C}} \frac{F(z+h)-F(z)}{h}$.

ESERCIZIO n. 19 a- Si provi che le funzioni F differenziabili per cui $\tilde{F}$ ha derivata in senso complesso sono tutte e sole quelle per cui $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x}$.
• b- Tra le funzioni da $\mathbf{R}^2$ in se che ammettono derivate parziali continue le uniche che conservano gli angoli tra due curve sono quelle derivabili in senso complesso.

• ESERCIZIO n. 20.1 Si mostri che se $t \mapsto s(t) \in]-1,1[$ è una funzione derivabile strettamente crescente, $(\varphi, t) \mapsto (\sqrt{1-s^2(t)}\cos\varphi, \sqrt{1-s^2(t)}\sin\varphi, s(t))$ è una parametrizzazione della sfera che conserva gli angoli tra curve se e solo se $s'(t) = 1 - s^2(t)$
- Imponendo che $s(0) = 0$ si provi che $s(t) = \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}$.
- Esprimere la coordinata t così determinata (di Mercatore) con la "latitudine" θ.

• ESERCIZIO n. 20.2 - Si provi che $(x,y,z) \mapsto \left(\frac{2rx}{r-z}, \frac{2ry}{r-z}\right)$ ristretta alla sfera di centro l'origine e raggio r è la proiezione stereografica dal "polo nord" sul tangente per il "polo sud".
- Se ne scriva l'inversa $(u,v) \mapsto (a(u,v).b(u,v).c(u.v))$
• - Si provi in modo sintetico che conserva gli angoli.

• ESERCIZIO n. 20.3 Si esprimano le coordinate della proiezione stereografica (u,v) in funzione di quelle di Mercatore. Si deduca quindi che la proiezione stereografica mantiene gli angoli tra curve e viceversa.
- Utilizzando longitudine e latitudine si provi che la proiezione stereografica conserva gli angoli.

ESERCIZIO n. 21 a- Si calcoli la derivata $\frac{dy}{dx}$ nei seguenti casi:
$x^3y - y^3x = a^2$, $\sin xy - e^{xy} - x^2y = 0$, $x^y = y^x$.

b- Si calcolino le derivate specificate per le seguenti relazioni:
$\frac{x^2}{a^2} + y^2b^2 + z^2c^2 = 1 :\ \frac{\partial z}{\partial x}$; $z^3 + 3xyz = a^3 :\ \frac{\partial z}{\partial x}$; $e^z - xy^2z = 0 :\ \frac{\partial z}{\partial y}$.

ESERCIZIO n. 22 - Sia $f(x,y) = \binom{x^2-y^2}{2xy} = (u,v)$: si studi l'immagine di f, si studi al variare di (u,v) come sono fatte le fibre $f^{-1}\{(u,v)\}$.

- Si determinino le regioni ove il differenziale è invertibile.

• - Si deteminino quindi le regioni ove la funzione è invertibile.

ESERCIZIO n. 23 a- Siano $f(x,y) = \binom{x^2}{y}$, $g(x,y) = \binom{x^3+xy}{y}$: se ne studino le immagini.

• b-Si studino le immagini delle regioni ove i differenziali non sono invertibili e come sono fatte le fibre $f^{-1}\{(u,v)\}$, $g^{-1}\{(u,v)\}$.

ESERCIZIO n. 24 a- Sia $f(x,y) = \binom{e^{x+y}-e^{x-y}-k^2x}{x+y} = (u,v)$, $k \in \mathbf{R}$: si studi l'immagine di f e al variare di (u,v) come sono fatte le fibre $f^{-1}\{(u,v)\}$.

b- Si determini un intorno di $(x,y) = (0,0)$ in cui f é iniettiva, ed quindi si calcolino (relativamente a tale intorno) $\frac{\partial x}{\partial u}(0,0)$ e $\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}(0,0)$.

ESERCIZIO n. 25 a- Sia $f : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^2$ $f(x_1,x_2,y_1,y_2,y_3) = \binom{2e^{x_1}+x_2y_1-4y_2+3}{x_2\cos x_1-6x_1+2y_1-y_3}$: si verifichi che in un intorno di $(0,1,3,2,7)$ la regione determinata dalle equazioni $f(x_1,x_2,y_1,y_2,y_3) = (0,0)$ é un grafico rispetto alle variabili (y_1,y_2,y_3).

b- Si calcoli $\left(\frac{\partial x_1}{\partial y_2}\right)_{y_1,y_3}(3,2,7)$.

• c- É possibile esplicitare (x_1,x_2) in funzione di (y_1,y_2,y_3) in ogni punto dell'insieme $\{(x_1,x_2,y_1,y_2,y_3) : f(x_1,x_2,y_1,y_2,y_3) = (0,0)\}$?

ESERCIZIO n. 26 a- Sia $f(x,y) = \binom{x^2-y^2}{xy} = (u,v)$: si trovi un intorno di $P_0 = (1,1)$ in cui f é iniettiva.

• b- Si calcolino le derivate parziali seconde in $U_0 = (0,1) = f(1,1)$ dell'inversa della funzione f ristretta a tale intorno.
