Analisi Matematica II, Anno Accademico 2014-2015
Ingegneria Edile, Civile, Ambientale

Paolo Acquistapace, Laura Cremaschi, Vincenzo M. Tortorelli

Prova in itinere del 26 Febbraio 2015
PRIMA PARTE: un'ora

COGNOME		N. MATRICOLA	
NOME		ANNO ISCRIZIONE	

ISTRUZIONI al fine della valutazione:
-*compilare l'intestazione in stampatello maiuscolo;*
- scrivere alla fine di ogni esercizio *solo le risposte* ai quesiti richiesti nel dato ordine;
- il tutto sui fogli consegnati, *gli unici* da restituire;
- *ricopiare a parte* le vostre risposte per confrontarle con quelle ufficiali.

ESERCIZIO n. 1 Si scriva la matrice A associata alla funzione bilineare alternante

$$\Lambda[(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)] = \langle (1, 1, 1) \times (1, 0, 1), (x_1, x_2, x_3) \times (y_1, y_2, y_3)\rangle.$$

Si ha

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Infatti, bastano tre coefficienti [**Lezione** del 3/10/2014] per determinare la matrice associata ad un'applicazione bilineare alternante. Nel nostro caso si ha:

$$A_1^2 = \Lambda[(1, 0, 0), (0, 1, 0)] = \langle (1, 1, 1) \times (1, 0, 1), (0, 0, 1)\rangle = -1,$$

$$A_1^3 = \Lambda[(1, 0, 0), (0, 0, 1)] = \langle (1, 1, 1) \times (1, 0, 1), (0, -1, 0)\rangle = 0,$$
$$A_2^3 = \Lambda[(0, 1, 0), (0, 0, 1)] = \langle (1, 1, 1) \times (1, 0, 1), (1, 0, 0)\rangle = 1.$$

ESERCIZIO n. 2 Si calcoli, al variare di α e β in $\mathbf{R}$, la minima distanza $\mathbf{D}$, rispetto alla seminorma $L^2(-\pi; \pi)$, della funzione $f(x) = x$ dalle funzioni $g_{\alpha,\beta}(x) = \alpha + \beta \cos x$.

Si ha $\mathbf{D} = \sqrt{\frac{2}{3}\pi^3}$. Infatti [**Lezione** del 15/1/0/2014]:

$$\begin{aligned}
d_{L^2}(f, g_{\alpha,\beta}) &= \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g_{\alpha,\beta}(x)|^2\, dx} = \\
&= \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [x^2 + \alpha^2 + \beta^2(\cos x)^2 - 2\alpha x - 2\beta x \cos x + 2\alpha\beta \cos x]\, dx} = \text{ (funzioni dispari)} \\
&= \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [x^2 + \alpha^2 + \beta^2(\cos x)^2 + 2\alpha\beta \cos x]\, dx} = \\
&= \sqrt{2\int_{0}^{\pi} [x^2 + \alpha^2 + \beta^2(\cos x)^2 + 2\alpha\beta \cos x]\, dx} = \text{ (poiché } \textstyle\int_0^\pi \cos x dx = 0) \\
&= \sqrt{2\int_{0}^{\pi} [x^2 + \alpha^2 + \beta^2(\cos x)^2]\, dx},
\end{aligned}$$

quindi la distanza è minima se e solo se $\alpha = 0$ e $\beta = 0$, con valore minimo $\mathbf{D} = \sqrt{\frac{2}{3}\pi^3}$.

Altra soluzione: la funzione dispari f è ortogonale per il prodotto scalare di $L^2(-\pi,\pi)$ alla funzione pari $g_{\alpha,\beta}$ e la funzione α è ortogonale in $L^2(0;\pi)$ alla funzione $\beta\cos x$; la distanza al quadrato tra due funzioni ortogonali in L^2 è (teorema di Pitagora) la somma dei quadrati delle norme: quindi

$$\begin{aligned}\mathbf{D}^2 &= \|f\|_{L^2}^2 + \|\alpha+\beta\cos x\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2 + \|\alpha\|_{L^2}^2 + \|\beta\cos x\|_{L^2}^2 = \\ &= \|f\|_{L^2}^2 + 2\pi\alpha^2 + 2\beta^2\int_0^\pi (\cos x)^2 dx,\end{aligned}$$

pertanto la distanza è minima quando $\alpha=\beta=0$.

ESERCIZIO n. 3 Calcolare, nel caso esista, $\mathbf{L} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^4+y^2}$.

Si ha $\mathbf{L}=0$. Infatti $\left|\frac{xy^2}{x^4+y^2}\right| = |x|\frac{y^2}{x^4+y^2} \le |x| \to 0$.

ESERCIZIO n. 4 Calcolare, nel caso esista, $\mathbf{L}' = \lim_{\substack{x^2+y^2\to+\infty \\ 2x^2\ge y\ge x^2}} xy - x^2 + y^2$.

Si ha $\mathbf{L}'=+\infty$. Infatti vale $xy-x^2+y^2 \ge -|x||y| - x^2+y^2 \ge -2|x|^3 - x^2 + x^4$; d'altronde, se $x^2+y^2\to+\infty$ con $2x^2\ge y\ge x^2$, si ha necessariamente $|x|\to+\infty$.

ESERCIZIO n. 5 Si scriva l'equazione del piano tangente al grafico della funzione $f(x,y) = \arctan(x+2y)$ nel punto $(1,0,\frac{\pi}{4})$.

L'equazione è $-x-2y+2z=\frac{\pi}{2}-1$. Infatti, poiché la funzione $f(x,y)=\arctan(x+2y)$ è differenziabile in $(1,0)$, il suo grafico [**Lezione** del 29/10/2014] ha come piano tangente nel punto $(1,0,f(1,0)) = (1,0,\frac{\pi}{4})$ il grafico della funzione $L(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,0)(x-1)+\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)y+\frac{\pi}{4}$. Calcolando tali derivate si vede che questo piano ha equazione $-\frac{1}{2}x-y+z=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$.

ESERCIZIO n. 6 Si calcoli $y''(1)$ per la funzione $y=y(x)$ definita intorno al punto $(1,0)$ dall'equazione $g(x,y) =: e^{x+y}+x^2+y^2-2x = e-1$.

Si ha $y''(1) = -\frac{4}{e}$.
Infatti, grazie al teorema del Dini, la relazione $g(x,y) =: e^{x+y}+x^2+y^2-2x = e-1$ definisce una funzione $y=y(x)$ intorno a $(1,0)$ poiché $\frac{\partial g}{\partial y}(1,0) = e \neq 0$.
Derivando [**Esercitazione** del 26/11/2014] tale relazione rispetto a x si ottiene, per x vicino ad 1, osservando che la funzione implicita $y=y(x)$ verifica $y(1)=0$:

$$(1+y')e^{x+y}+2x+2yy'-2=0,$$

e derivando ancora: $$(1+y')^2e^{x+y}+y''e^{x+y}+2+2(y')^2+2yy''=0.$$
Calcolando per $x=1$ e $y=y(1)=0$, dalla prima si ottiene $y'(1)=-1$, e quindi dalla seconda $y''(1)e+4=0$.

ESERCIZIO n. 7 Si scriva il polinomio di Taylor di ordine 7 e centro $(0,0,0)$ della funzione $f(x,y,z) = \cos xyz - z\sin xy$.

Il polinomio è $1-zxy-x^2y^2z^2\frac{1}{2}+zx^3y^3\frac{1}{6}$.
Infatti usando [**Lezione** del 27/11/2014] gli sviluppi notevoli in $t=0$ per $\cos t$ e $\sin t$ con $t=xyz$ ovvero $t=xy$, e posto $\rho^2=x^2+y^2+z^2$, si ottiene

$$\begin{aligned}f(x,y,z) &= 1-x^2y^2z^2\frac{1}{2}+O(x^4y^4z^4)-zxy+zx^3y^3\frac{1}{6}+O(zx^5y^5) = \\ &= 1-zxy-x^2y^2z^2\frac{1}{2}+zx^3y^3\frac{1}{6}+O(\rho^{11});\end{aligned}$$

grazie all'unicità del polinomio di Taylor si conclude.

Analisi Matematica II, Anno Accademico 2014-2015.
Ingegneria Edile, Civile, Ambientale

Paolo Acquistapace, Laura Cremaschi, Vincenzo M. Tortorelli

Prova in itinere, 26 Febbraio 2015
SECONDA PARTE: due ore

COGNOME		N. MATRICOLA	
NOME		ANNO ISCRIZIONE	

ISTRUZIONI al fine della valutazione:
-*compilare l'intestazione in stampatello maiuscolo;*
- risolvere almeno un esercizio, in tutti i punti, *riportando con ordine* lo svolgimento della soluzione e *motivandolo accuratamente.*

ESERCIZIO n. 1 Per ogni $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$, si consideri la funzione $f_n(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-xny^2}\,dy$, $x > 0$.
(a) Fissato $\varepsilon > 0$, mostrare che $f_n \to 0$ uniformemente in $[\varepsilon; +\infty[$.
(b) Analizzare la convergenza uniforme in $]0; +\infty[$.
(c) Stabilire se vi è convergenza in $L^1(0; +\infty)$.

(a) Fissato $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$, se $x > 0$ l'integrale $f_n(x) = \int_1^{+\infty} e^{-xny^2}\,dy$ è ben definito e finito, in quanto per $y \geq 0$ l'integranda e^{-xny^2} è continua, non negativa e minore di e^{-y} che è sommabile.
Cambiando variabile di integrazione, $z = y\sqrt{nx}$, si ottiene

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{nx}} \int_{\sqrt{nx}}^{+\infty} e^{-z^2}\,dz. \tag{1}$$

Quindi

$$\sup_{x \geq \varepsilon} |f_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n\varepsilon}} \int_0^{+\infty} e^{-z^2} dz \quad \to 0 \quad \text{per } n \to +\infty,$$

cioè f_n converge uniformemente a $f \equiv 0$ su $[\varepsilon; +\infty[$ per ogni $\varepsilon > 0$ fissato.

(b)[**Lezione** del 16/10/2014] Non vi è convergenza uniforme su $]0; +\infty[$. Si osserva infatti che le f_n non sono funzioni limitate in $]0; +\infty[$; quindi l'eventuale limite uniforme g non sarebbe limitato su $]0; +\infty[$, poiché

$$\sup |g| \geq \sup |f_n| - \sup |f_n - g|, \qquad \text{con } \sup |f_n - g| \to 0.$$

D'altra parte, g dovrebbe essere eguale al limite puntuale delle f_n, che è $f \equiv 0$.

(c) Decomponendo $]0; +\infty[$ in $]0; 1]$ unito a $[1; +\infty[$, si osserva che sul primo intervallo, usando $(*)$, la $f_n(x)$ si controlla semplicemente con $\frac{1}{\sqrt{nx}}$. Sul secondo, essendo $y \geq 1$ e $x \geq 1$, il controllo è dato da $\int_1^{+\infty} e^{-nxy^2} dy \leq \int_1^{+\infty} e^{-nxy} dy = \frac{e^{-nx}}{nx} \leq e^{-nx}$. Quindi $f_n \to 0$ in $L^1(0; +\infty)$.
Ricapitolando:

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{L^1(0;\infty)} &= = \int_0^{+\infty} |f_n(x)|dx = \int_0^1 |f_n(x)|dx + \int_1^{+\infty} |f_n(x)|dx \leq \\
&\leq \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{nx}} \int_0^{+\infty} e^{-z^2}\, dz + \int_1^{+\infty} \left(\int_1^{+\infty} e^{-nxy^2} dy \right) dx \leq \\
&\leq \frac{2}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} e^{-z^2}\, dz + \int_1^{+\infty} \left(\int_1^{+\infty} e^{-nxy} dy \right) dx = \\
&= \frac{2}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} e^{-z^2}\, dz + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{nx} dx \leq \frac{2}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} e^{-z^2}\, dz + \int_1^{+\infty} e^{-nx} dx = \\
&= \frac{2}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} e^{-z^2}\, dz + \frac{1}{ne^n} \to 0.
\end{aligned}
$$

ESERCIZIO n. 2 (a) Si calcoli il valore massimo **M** ed il valore minimo **m** della funzione $f(x, y, z) = x^2 - yz$ nell'insieme E descritto dalla relazione $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

(b) Si calcolino tutti i punti critici tangenziali per la funzione f nell'insieme E' descritto da $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, e si determini la loro natura.

(a) - Poiché la funzione f è continua su un insieme compatto *esistono* nel dominio punti di valore massimo e minimo della funzione (Teoremi di Weierstrass e Bolzano-Weierstrass [**Lezione** 16/10/2014]).

-*L'interno* del dominio è definito da $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 < 1$; poiché la funzione f è ivi differenziabile, gli eventuali punti estremali interni devono essere critici (stazionari), cioè

$$
\begin{cases}
2x = 0 \\
-z = 0 \\
-y = 0 \\
x^2 + y^2 + z^2 < 1,
\end{cases}
\tag{2}
$$

quindi l'unico candidato interno è $(0, 0, 0)$ con $f(0, 0, 0) = 0$.

-*La frontiera* del dominio è definita da $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 1$: poiché la funzione f è differenziabile e la frontiera (teorema del Dini) è una 2-varietà, i punti estremali devono essere necessariamente punti critici (stazionari) tangenziali, ovvero devono verificare la condizione di ortogonalità al vincolo di Lagrange $\nabla f = \lambda \nabla g$. Si ha quindi il sistema

$$
\begin{cases}
2x = 2\lambda x & (dx) \\
-z = 2\lambda y & (dy) \\
-y = 2\lambda z & (dz) \\
x^2 + y^2 + z^2 = 1 & (V)
\end{cases}
, \quad \text{ovvero} \quad
\begin{array}{c}
\begin{pmatrix} 2(1-\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & -2\lambda & -1 \\ 0 & -1 & -2\lambda \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\\
x^2 + y^2 + z^2 = 1
\end{array}
\tag{3}
$$

Inoltre dovendo solo trovare i valori estremali e non i punti, grazie al teorema di Eulero per le funzioni 2-positivamente omogenee i valori estremali di f saranno proprio i valori λ per cui il sistema ha soluzione [**Lezioni** 6/11, 11, 17/12/2014], **Appunti** 11/12/2014]: ovvero i λ per cui

$$
\det \begin{pmatrix} 2(1-\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & -2\lambda & -1 \\ 0 & -1 & -2\lambda \end{pmatrix} = 0,
$$

cioè $\lambda = 1$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $\lambda = -\frac{1}{2}$.

-Per concludere si confrontano i valori trovati, ottenendo $\mathbf{M} = 1$, $\mathbf{m} = -\frac{1}{2}$, mentre i valori $0 = f(0,0,0)$ e $\frac{1}{2}$ non sono valori di estremali sul dominio: in particolare non vi sono punti interni di valore massimo o minimo.

(b) Necessariamente vi devono essere punti sulla frontiera E' nei quali la funzione f assume i valori estremali su E dati da $\mathbf{M} = 1$ o $\mathbf{m} = -\frac{1}{2}$; essi saranno rispettivamente punti di massimo e minimo assoluto su tutto il dominio E, e in particolare di massimo e e minimo relativo in E e quindi anche in E'. Si tratta di risolvere per $\lambda = 1$ e per $\lambda = -\frac{1}{2}$ il sistema (3):

$$\begin{cases} 2x = 2x \\ -z = 2y \\ -y = 2z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} 2x = -x \\ -z = -y \\ -y = -z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} .$$

Dunque $(1,0,0)$ e $(-1,0,0)$ sono i due punti di massimo, soluzioni del primo sistema con $\lambda = 1$; $(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ sono i due punti di minimo, soluzioni del secondo sistema con $\lambda = -\frac{1}{2}$.
Per il terzo sistema con $\lambda = \frac{1}{2}$ si ha

$$\begin{cases} 2x = x \\ -z = y \\ -y = z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} ,$$

che ha le due soluzioni $(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, punti in cui f assume il valore $\mathbf{S} = \frac{1}{2}$. Essi non sono né punti di massimo relativo, né punti di minimo relativo per f su $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e tanto meno sul dominio intero. Infatti:

$$f(0, \cos t, \sin t) = -\frac{1}{2}\sin 2t < \frac{1}{2} = \mathbf{S} \quad \text{per} \quad t \neq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi,$$

ma anche per $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ si ha

$$f(x, y, \frac{1}{\sqrt{2}}) = x^2 - \frac{y}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} - y^2 - \frac{y}{\sqrt{2}} > \frac{1}{2} = \mathbf{S} \quad \text{per} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} < y < 0.$$

Nota 1: per quanto riguarda il punto critico interno $(0,0,0)$, senza calcolare l'Hessiano si ha direttamente che esso non è nemmeno un punto di valore estremale relativo: infatti

$$f(x,0,0) = x^2 > 0 \quad \text{per} \quad x \neq 0, \qquad f(0,y,y) = -y^2 < 0 \text{ per } \; y = z \neq 0.$$

Nota 2: chiaramente si poteva limitare la teoria coinvolta (senza usare l'omogeneità del problema e la linearià del sistema) al teorema di Lagrange e discutere direttamente il sistema derivante dalle condizioni di ortogonalità

$$\begin{cases} 2x = 2\lambda x & (dx) \\ -z = 2\lambda y & (dy) \\ -y = 2\lambda z & (dz) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 & (V) \end{cases} ;$$

dalla prima equazione si ottiene la dicotomia $x = 0$ o $\lambda = 1$.

Nel caso $x = 0$ le altre due equazioni comportano $4\lambda^2 y = y$, per cui dovendo escludere $y = 0$ (si avrebbe per la seconda equazione $z = 0$ e quindi non sarebbe soddisfatto il vincolo) dovrà essere $\lambda = \pm\frac{1}{2}$. I punti stazionari tangenziali risultano in questo caso i seguenti quattro:

$$\left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Il caso $\lambda = 1$ comporta che i punti critici sono due: $(\pm 1, 0, 0)$.