ANA 2 | 2° semestre | 2/3/15

(1)

MISURA DI LEBESGUE IN $\mathbb{R}^N$

Motivazioni: con la nozione di integrale di Riemann che conoscete, potete passare al limite sotto il segno di integrale

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n \, dx = \int_A \lim_n f_n \, dx$$

solo nelle ipotesi (troppo restrittive)

$$m(A) < \infty \quad , \quad f_n \longrightarrow f \text{ uniformemente in } A.$$

Inoltre le quantità

$$\int_A |f(x)| dx \,, \quad \left[\int_A |f(x)|^2 dx \right]^{1/2}$$

non sono norme, ma solo quasi-norme; oppure, nello spazio delle funzioni continue e limitate su A, si tratta di norme non complete.

1° passo Partiamo dai parallelepipedi di $\mathbb{R}^N$; poniamo

$$\mathcal{P}_N = \{ P \subseteq \mathbb{R}^N : \; P = \prod_{i=1}^{N} I_i \,, \; I_i \text{ intervallo di } \mathbb{R} \; (i=1\dots N) \}$$

Ricordiamo che $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo (limitato o no) se è della forma: $I = \{ x \in \mathbb{R} : \; a < x < b \}$ con $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\mp\infty\}$; ciascuna diseguaglianza può essere stretta o no.

Definendo la lunghezza $\ell(I)$ come

$$\ell(I) = b-a \; (\text{finita se } a,b \in \mathbb{R}, \text{ infinita altrimenti})$$

è naturale definire il <u>volume N-dimensionale</u> di un parallelepipedo $P \in \mathcal{P}_N$ come

$$V_N(P) = \prod_{i=1}^{N} \ell(I_i) .$$

Ma nel caso "degenere" in cui esistono i,j per i quali

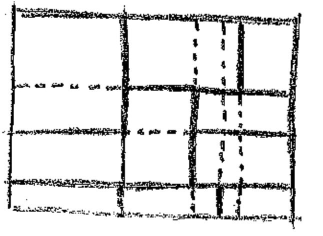
$$I_i = \{x_i\}, \qquad I_j = [b_j, +\infty[\quad \text{oppure} \quad I_j =]-\infty, a_j],$$

nel prodotto che definisce $V_N(P)$ compare il sottoprodotto $0 \cdot \infty$. Come fare? Per <u>evidenti</u> ragioni di opportunità [una retta in $\mathbb{R}^2$ ha <u>area nulla</u>, un piano in $\mathbb{R}^3$ ha <u>volume nullo</u>], si fa la

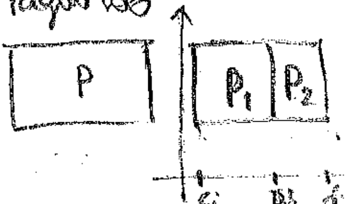
<u>convenzione</u>: $0 \cdot \infty = 0$ <u>in tutta la teoria dell'integrale</u>.

<u>Proposizione</u> Se $P \in \mathcal{P}_N$, e P è unione finita di parallelepipedi adiacenti (ossia $P_j \in \mathcal{P}_N$, $\mathring{P}_i \cap \mathring{P}_j = \emptyset$, $P = \bigcup_{j=1}^{m} P_j$), allora

$$V_N(P) = \sum_{j=1}^{m} V_N(P_j)$$



<u>dim.</u> Il punto chiave è che con 1 taglio solo



la relazione $V_N(P) = V_N(P_1) + V_N(P_2)$ si ottiene con conto immediato: se $I_i =]c_i, d_i[$ e $p_i \in]c_i, d_i[$, allora $\ell(I_i) = (p_i - c_i) + (d_i - p_i)$ e per distributività si ottiene la tesi. Con un n° finito di tagli successivi si ha la tesi nel caso generale. □

2° passo Estendiamo la funzione $v_N : \mathcal{P}_N \to [0,\infty]$ ad una funzione "misura esterna" $m_N^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \to [0,\infty]$.

Definizione Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$. La misura esterna N-dimensionale di E è
$$m_N^*(E) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} v_N(P_i) : P_i \in \mathcal{P}_N,\ P_i \text{ aperti},\ E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i \right\}.$$

Sono conseguenze immediate della definizione:

(i) $m_N^*(\phi) = m_N^*(\{x\}) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$;

(ii) $m_N^*(E) \geq 0 \quad \forall E \subseteq \mathbb{R}^N$;

(iii) $E, F \subseteq \mathbb{R}^N,\ E \subseteq F \implies m_N^*(E) \leq m_N^*(F)$ (monotonia)

(iv) $m_N^*(E+x) = m_N^*(E) \quad \forall E \subseteq \mathbb{R}^N,\ \forall x \in \mathbb{R}^N$ (invarianza per traslazioni).

(v) la definizione di $m_N^*(E)$ non cambia se si considerano, in luogo dei ricoprimenti di E costituiti da parallelepipedi aperti, quelli costituiti da parallelepipedi chiusi o quelli costituiti da parallelepipedi qualunque. Infatti: indichiamo rispettivamente con $\overline{m}_N^*(E)$ e $\widetilde{m}_N^*(E)$ gli inf relativi ai ricoprimenti di E fatti con parallelepipedi chiusi o qualsiasi. Sia $\varepsilon > 0$, sia $\{P_i\}$ un ricoprimento con parallelepipedi aperti di E, tale che $\sum_{i=1}^{\infty} v_N(P_i) < m_N^*(E) + \varepsilon$; allora $\overline{m}_N^*(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} v_N(\overline{P_i}) = \sum_{i=1}^{\infty} v_N(P_i) < m_N^*(E) + \varepsilon$, e per l'arbitrarietà di ε si deduce $\overline{m}_N^*(E) \leq m_N^*(E)$.

Sia ora $\{Q_i\}$ un ricoprimento di E fatto di parallelepipedi chiusi, tali che

$$\sum_{i=1}^{\infty} v_N(Q_i) < \overline{m}_N^*(E) + \varepsilon ;$$

scegliamo per ogni i un parallelepipedo P_i aperto, $P_i \supseteq Q_i$, tale che $v_N(P_i) < v_N(Q_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$; allora $\{P_i\}$ ricopre E e quindi

$$m_N^*(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} v_N(P_i) < \sum_{i=1}^{\infty}\left(v_N(Q_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}\right) < \overline{m}_N^*(E) + 2\varepsilon,$$

e quindi $m_N^*(E) \leq \overline{m}_N^*(E)$. Dunque $m_N^*(E) = \overline{m}_N^*(E)$.
Il calcolo per $\widetilde{m}_N(E)$ è analogo e lo omettiamo.

Vogliamo adesso dimostrare che la misura esterna è una <u>estensione</u> del volume N-dimensionale, nel senso che

$$m_N^*(P) = v_N(P) \quad \forall P \in \mathcal{P}_N .$$

A questo scopo è basilare il seguente lemma di compattezza.

<u>Lemma</u> Sia $K \subseteq \mathbb{R}^N$. Sono fatti equivalenti:
(i) K è chiuso e limitato;
(ii) K è <u>compatto per successioni</u>, vale a dire ogni successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$ ha una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergente ad un elemento di K;
(iii) K è <u>compatto per ricoprimenti</u>, vale a dire ogni ricoprimento $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di K costituito da aperti ha un sottoricoprimento finito $\{U_{n_1}, \dots, U_{n_p}\}$ (cioè $K \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n \Rightarrow K \subseteq \bigcup_{i=1}^{p} U_{n_i}$).

<u>dim</u>. (i) $\Leftrightarrow$ (ii) vi è già noto.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Sia $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un ricoprimento aperto di K.
Supponiamo per assurdo che esso non abbia alcun sottoricoprimento finito: allora, in particolare, per ogni $n\in\mathbb{N}$ l'insieme

$$K\setminus\bigcup_{i=1}^{n}U_i$$

non è vuoto, e quindi contiene almeno un elemento x_n. In questo modo si costruisce una successione $\{x_n\}\subseteq K$. Per ipotesi, essa ha una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ che converge a un elemento $x\in K$.
Poiché $K\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}U_n$, esiste $p\in\mathbb{N}$ tale che $x\in U_p$. Poiché U_p è aperto e $x_{n_k}\longrightarrow x$, esiste una soglia k_p tale che $x_{n_k}\in U_p$ $\forall k\geq k_p$.
D'altra parte, per costruzione, se $k\geq k_p$ e se $n_k\geq p$ (il che è vero per k grande), si ha $x_{n_k}\in K\setminus\bigcup_{i=1}^{n_k}U_i\subseteq K\setminus U_p$; ciò è assurdo.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq K$ una successione. Se essa ha una sottosuccessione costante, non c'è niente da dimostrare. Altrimenti, sarà $x_n\neq x_m$ per $n\neq m$. Supponiamo per assurdo che $\{x_n\}$ non abbia alcuna sottosuccessione convergente: allora ogni x_k compare al più un numero finito di volte nell'insieme $S=\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Quindi, posto $S_k=\{x_n\in S:\ x_n\neq x_k\}$, $k\geq 1$, S_k è infinito ed esiste un aperto U_k tale che $x_k\in U_k$ e $U_k\cap S_k=\emptyset$. Detto U_0 un aperto contenente $K\setminus\bigcup_{k=1}^{\infty}U_k$, la famiglia $\{U_k\}_{k\geq 0}$ è un ricoprimento aperto di K. Per ipotesi, esiste un sottoricoprimento finito $\{U_{k_1}, \dots, U_{k_p}\}$ di K, con $0 \le k_1 < k_2 < \dots < k_p$. D'altra parte, per k abbastanza grande il punto x_k, per costruzione, non può appartenere né a U_0, né a U_{k_j} per alcun $j \le p$, e quindi $x_k \in K \setminus \bigcup_{i=1}^{p} U_{k_i}$: assurdo. □

Ciò premesso, proviamo il risultato di estensione:

Proposizione Si ha $m_N^*(P) = v_N(P) \quad \forall P \in \mathcal{P}_N$.

dim ($\le$) Se P è un parallelepipedo aperto, per definizione di m_N^* si ha $m_N^*(P) \le v_N(P)$ (considerando il ricoprimento $\{P_i\}$ di P tale che $P_1 = P$, $P_j = \emptyset \ \forall j > 1$).

Se P non è aperto, ma è illimitato, la tesi è ovvia perché $m_N^*(P) \le +\infty = v_N(P)$.

Se P è chiuso e limitato, $P = \prod_{j=1}^{N} [c_j, d_j]$, allora scelto il ricoprimento $\{P_i\}$ di P con $P_1 = \prod_{j=1}^{N}]c_j - \varepsilon, d_j + \varepsilon[$, $P_j = \emptyset$ per $j > 1$, (ove $\varepsilon > 0$), si ha

$$m_N^*(P) \le v_N(P_1) = \prod_{j=1}^{N} (d_j - c_j + 2\varepsilon);$$

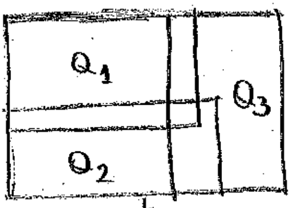
questo vale per ogni $\varepsilon > 0$, e quindi si ha la tesi.

Infine se P non è aperto ma è limitato,

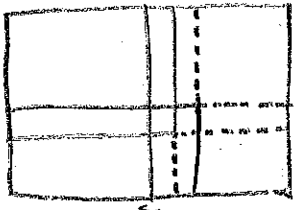
$$m_N^*(P) \le m_N^*(\overline{P}) = v_N(\overline{P}) = v_N(P).$$

(≥) La tesi è ovvia se $v_N(P)=0$; sia dunque $v_N(P)>0$.

Supponiamo dapprima P chiuso e limitato. Sia $\{P_i\}_{i\in\mathbb{N}}\subseteq\mathcal{P}_N$ un ricoprimento aperto di P. Per il lemma, esistono $P_{i_1},\dots,P_{i_k}\in\{P_i\}$ tali che $P\subseteq\bigcup_{h=1}^{k}P_{i_h}$. Poniamo $Q_h=P\cap P_{i_h}$: allora $P=\bigcup_{h=1}^{k}Q_h$.



$P=\bigcup_{h=1}^{k}Q_h$



$P=\bigcup_{j=1}^{s}R_j$

Con un numero finito di tagli paralleli agli assi, possiamo decomporre ciascun Q_h ottenendo una famiglia di parallelepipedi $R_1,\dots,R_s$ tali che $\mathring{R}_i\cap\mathring{R}_j=\emptyset$, $\bigcup_{j=1}^{s}R_j=P$ e ciascun Q_h è unione di alcuni degli R_j, di modo che $v_N(P)=\sum_{j=1}^{s}v_N(R_j)\le\sum_{h=1}^{k}v_N(Q_h)$.

Ne segue

$$v_N(P)\le\sum_{h=1}^{k}v_N(Q_h)\le\sum_{h=1}^{k}v_N(P_{i_h})\le\sum_{i=1}^{\infty}v_N(P_i)$$

e per l'arbitrarietà del ricoprimento

$$v_N(P)\le m_N^*(P).$$

Sia ora P limitato ma non chiuso. Essendo $v_N(P)>0$, per ε piccolo possiamo ridurre i lati di P, ottenendo un parallelepipedo chiuso $P_\varepsilon\subsetneq P$ tale che $v_N(P)<v_N(P_\varepsilon)+\varepsilon$. Ne segue

$$v_N(P)<v_N(P_\varepsilon)+\varepsilon=m_N^*(P_\varepsilon)+\varepsilon\le m_N^*(P)+\varepsilon,$$

e per l'arbitrarietà di ε, $v_N(P) \le m_N^*(P)$.
Infine, se P è illimitato, allora $v_N(P) = +\infty$ (avendo già escluso il caso $v_N(P)=0$). Riducendo gli spigoli illimitati di P ad opportuni spigoli di lunghezza n, si ottiene un parallelepipedo chiuso $P_n \subseteq P$, tale che $v_N(P_n) \to +\infty$ per $n \to +\infty$. Ne segue $m_N^*(P) \ge m_N^*(P_n) = v_N(P_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, e pertanto $m_N^*(P) = +\infty = v_N(P)$. □

Proviamo ora che $m_N^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \to [0,\infty[$ è "numerabilmente subadditiva".

Proposizione Se $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, allora $m_N^*(E) \le \sum_{n=1}^{\infty} m_N^*(E_n)$.
(si dice che m_N^* è numerabilmente subadditiva)

dim. Se la serie è divergente, non c'è niente da provare. Altrimenti, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\{P_{in}\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}_N$, ricoprimento aperto di E_n, tale che $\sum_{i=1}^{\infty} v_N(P_{in}) < m_N^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$. La famiglia $\{P_{in}\}_{i,n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}_N$ è un ricoprimento aperto di E, e pertanto

$$m_N^*(E) \le \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} v_N(P_{in}) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} v_N(P_{in})\right) \le \sum_{n=1}^{\infty}\left(m_N^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} m_N^*(E_n) + \varepsilon,$$

e l'arbitrarietà di ε dà la tesi. □

<u>Osservazioni</u> (1) Come vedremo, se $E, F \subseteq \mathbb{R}^N$ e $E \cap F = \phi$, non vale in generale l'additività: si ha sempre $m_N^*(E \cup F) \leq m_N^*(E) + m_N^*(F)$, ma la disuguaglianza può essere stretta.

(2) Se $A \subseteq \mathbb{R}^N$ è aperto non vuoto, allora $m_N^*(A) > 0$. Infatti se $x \in A$, esiste un parallelepipedo aperto $P \subset A$ tale che $x \in P$. Perciò

$$m_N^*(A) \geq m_N^*(P) = v_N(P) > 0 .$$