<u>3° passo</u> Restringiamo la funzione misura esterna $m_N^*: \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \to [0,\infty]$ alla classe $\mathcal{M}_N$ degli "insiemi misurabili", sulla quale saranno vere proprietà migliori.

<u>Definizione</u> Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$. Diciamo che E è <u>misurabile</u> se per ogni "insieme test" $A \subseteq \mathbb{R}^N$ vale
$$m_N^*(A) = m_N^*(A \cap E) + m_N^*(A \cap E^c) \quad [E^c = \mathbb{R}^N \setminus E = \text{complementare di } E]$$

In altre parole E è misurabile se "decompone bene", nel senso della misura, ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$.

Osserviamo che, per subadditività, la relazione $\leq$ è sempre vera, quindi quello che conta in questa definizione è l'altra ($\geq$).

Si noti che, detta $\mathcal{M}_N$ la classe degli insiemi misurabili, si ha:

(1) $E \in \mathcal{M}_N \iff E^c \in \mathcal{M}_N$;

(2) $\emptyset, \mathbb{R}^N \in \mathcal{M}_N$

(3) $m_N^*(E) = 0 \implies E \in \mathcal{M}_N$ (infatti, per ogni $A \subseteq \mathbb{R}^N$ si ha $m_N^*(A \cap E) \leq m_N^*(E) = 0$, da cui $m_N^*(A) \geq m_N^*(A \cap E^c) = m_N^*(A \cap E^c) + m_N^*(A \cap E)$).

<u>Proposizione</u> $E, F \in \mathcal{M}_N \implies E \cup F \in \mathcal{M}_N$.

<u>dim</u> Poiché E è misurabile, per ogni insieme test A vale
$$m_N^*(A) = m_N^*(A \cap E) + m_N^*(A \cap E^c).$$
Poiché F è misurabile, scelto $A \cap E^c$ come insieme test, vale

$$m_N^*(A\cap E^c) = m_N^*(A\cap E^c\cap F) + m_N^*(A\cap E^c\cap F^c) =$$
$$= m_N^*(A\cap E^c\cap F) + m_N^*(A\cap (E\cup F)^c),$$ (2)

e dunque

$$m_N^*(A) = m_N^*(A\cap E) + m_N^*(A\cap E^c\cap F) + m_N^*(A\cap(E\cup F)^c).$$

D'altra parte,

$$(A\cap E)\cup(A\cap E^c\cap F) = A\cap(E\cup F)$$

e quindi, per subadditività,

$$m_N^*(A) \geq m_N^*(A\cap(E\cup F)) + m_N^*(A\cap(E\cup F)^c). \ \square$$

<u>Corollario</u>. $E, F\in \mathcal{M}_N \Rightarrow E\setminus F,\ E\cap F\in \mathcal{M}_N$.

<u>dim</u>. $E,F\in\mathcal{M}_N \Rightarrow E^c, F^c\in\mathcal{M}_N \Rightarrow E^c\cup F^c = (E\cap F)^c\in\mathcal{M}_N \Rightarrow$ $E\cap C\in\mathcal{M}_N$;

di conseguenza $E\setminus F = E\cap F^c\in\mathcal{M}_N$. $\square$

<u>Osservazione</u>. Se $E,F\in\mathcal{M}_N$ e $E\cap F=\phi$, allora

$$m_N^*(E\cup F) = m_N^*(E) + m_N^*(F);$$

basta usare la misurabilità di E scegliendo come insieme test $E\cup F$.

Dunque m_N^* è <u>additiva</u> sui disgiunti misurabili. Ora vogliamo andare oltre, provando la <u>numerabile additività</u>. Ci serve un risultato intermedio:

<u>Lemma</u>. Siano $E_1, \dots E_m$ misurabili e disgiunti. Per ogni insieme test A si ha

$$m_N^*\left(A\cap \bigcup_{k=1}^m E_k\right) = \sum_{k=1}^m m_N^*(A\cap E_k).$$

dim. Per induzione. Il caso $n=1$ è banale. Se la tesi vale per $h=1,\dots k$, consideriamo $E_1,\dots,E_{k+1} \in \mathcal{M}_N$ disgiunti ed applichiamo a E_{k+1} la definizione scegliendo come insieme test $A \cap \bigcup_{h=1}^{k+1} E_h$. Si trova

$$m_N^*\left(A \cap \bigcup_{h=1}^{k+1} E_h\right) = m_N^*\left(A \cap E_{k+1}\right) + m_N^*\left(A \cap \bigcup_{h=1}^{k} E_h\right) =$$

$$\text{(per passo induttivo)} = m_N^*\left(A \cap E_{k+1}\right) + \sum_{h=1}^{k} m_N^*\left(A \cap E_h\right) =$$

$$= \sum_{h=1}^{k+1} m_N^*\left(A \cap E_h\right). \quad \square$$

Proposizione Sia $\{E_n\}$ una successione di insiemi misurabili. Posto $E = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n$, E è misurabile.

dim. Anzitutto, scriviamo E come unione numerabile di insiemi misurabili e disgiunti: basta porre

$$F_0 = E_0 ; \qquad F_{n+1} = E_{n+1} \setminus \bigcup_{k=0}^{n} F_k .$$

Gli F_n sono disgiunti per costruzione, inoltre è facile vedere che $\bigcup_{n=0}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n = E$.

Ciò premesso, se A è un insieme test si ha per $p \in \mathbb{N}$

$$m_N^*(A) = m_N^*\left(A \cap \bigcup_{n=0}^{p} F_n\right) + m_N^*\left(A \cap \left(\bigcup_{n=0}^{p} F_n\right)^c\right) \geq$$

$$\geq m_N^*\left(A \cap \bigcup_{n=0}^{p} F_n\right) + m_N^*\left(A \cap E^c\right) = \text{(per il lemma)}$$

$$= \sum_{n=0}^{p} m_N^*\left(A \cap F_n\right) + m_N^*\left(A \cap E^c\right);$$

per $p \to \infty$ si deduce

$$m_N^*(A) \geq \sum_{n=0}^{\infty} m_N^*(A \cap F_n) + m_N^*(A \cap E^c) \geq$$

(per subadditività numerabile)

$$\geq m_N^*\left(A \cap \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n\right) + m_N^*(A \cap E^c) = m_N^*(A \cap E) + m_N^*(A \cap E^c).$$

Ciò prova che E è misurabile. $\square$

La classe $\mathcal{M}_N$ è dunque chiusa per $\bigcup_{n \in \mathbb{N}}$ e per passaggio al complementare, quindi anche per $\bigcap_{n \in \mathbb{N}}$; inoltre contiene $\emptyset$ e $\mathbb{R}^N$. Una famiglia di insiemi con queste proprietà è detta <u>σ-algebra</u>. $\mathcal{M}_N$ è perciò una σ-algebra.

<u>Proposizione</u>. Se $\{E_n\} \subseteq \mathcal{M}_N$ e gli E_n sono disgiunti, allora

$$m_N^*\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} m_N^*(E_n).$$

<u>dim</u>. ($\leq$) vale per numerabile subadditività;

($\geq$) fissato $p \in \mathbb{N}$, usando il lemma con $A = \mathbb{R}^N$ si ha

$$m_N^*\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n\right) \geq m_N^*\left(\bigcup_{n=0}^{p} E_n\right) = \sum_{n=0}^{p} m_N^*(E_n),$$

e per $p \to \infty$ si ha

$$m_N^*\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n\right) \geq \sum_{n=0}^{\infty} m_N^*(E_n). \quad \square$$

A questo punto, la classe $\mathcal{M}_N$ è soddisfacente per i nostri scopi.

La <u>restrizione</u> di m_N^* a $\mathcal{M}_N$ si chiama <u>misura di Lebesgue</u> e si denota con m_N.

Rimane però un'ultima questione. Quanto è grande $\mathcal{M}_N$? Proveremo che $\mathcal{M}_N$ contiene i parallelepipedi, gli aperti, i chiusi e tanti altri insiemi.

Proposizione $\mathcal{P}_N \subset \mathcal{M}_N$, ossia ogni parallelepipedo di $\mathbb{R}^N$ è misurabile.

dim. Sappiamo già che $\mathbb{R}^N \in \mathcal{M}_N$. Inoltre, ogni parallelepipedo non aperto è unione di un parallelepipedo aperto e di un numero finito di insiemi di misura nulla (le facce di P), i quali come sappiamo sono misurabili. Quindi è sufficiente mostrare che ogni parallelepipedo aperto è misurabile.

Sia dunque $P \in \mathcal{P}_N$ aperto e sia A un insieme test: dobbiamo far vedere che $m_N^*(A) \geq m_N^*(A \cap P) + m_N^*(A \cap P^c)$, il che è ovvio se $m_N^*(A) = \infty$. Supponiamo dunque $m_N^*(A) < \infty$ e fissiamo $\varepsilon > 0$. Esiste un ricoprimento aperto di A, fatto di parallelepipedi P_n, tale che

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_N(P_n) < m_N^*(A) + \varepsilon .$$

Ora notiamo che i $P_n \cap P$ sono parallelepipedi aperti che ricoprono $A \cap P$; inoltre ciascun P_n può essere decomposto, con un numero finito di tagli, nell'unione di $P_n \cap P$ (se non vuoto) e di altri parallelepipedi R_{jn}, $1 \leq j \leq k_n$, privi di punti interni comuni. Quindi

$$v_N(P_n) = v_N(P_n \cap P) + \sum_{j=1}^{k_n} v_N(R_{jn}) ,$$

da cui,

$$m_N^*(A) > -\varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} v_N(P_n) = -\varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} v_N(P_n \cap P) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k_n} m_N^*(R_{jn}) \geq$$

$$\geq -\varepsilon + m_N^*(A\cap P) + m_N^*(A\setminus P)$$

(dato che $A\setminus P \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{k_n} R_{jn}$). Poiché ε è arbitrario, si ha la tesi.

Proposizione Gli aperti e i chiusi di $\mathbb{R}^N$ sono misurabili.

dim. È sufficiente mostrare che ogni aperto A non vuoto è unione numerabile di parallelepipedi aperti.
Sia dunque A un aperto di $\mathbb{R}^N$. Per ogni $n\in\mathbb{N}^+$ poniamo

$$A_n=\{x\in A : d(x,\partial A)>\tfrac{1}{n}\}\cap B(0,n)$$

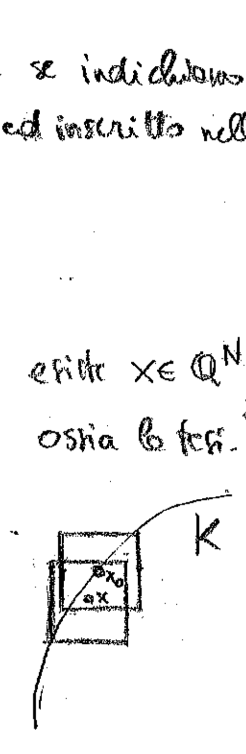
ove $B(0,n)=\{x\in\mathbb{R}^N : |x|_N<n\}$ e $d(x,\partial A)=\inf\{|x-y|_N : y\in\partial A\}$.
Gli A_n sono aperti limitati e $A_n\subset A_{n+1}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=A$. Consideriamo i compatti $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}\setminus A_1$, …, $\overline{A_{n+1}}\setminus A_n$, eccetera, la cui unione è ancora A. Ci serve il seguente

Lemma Se $K\subseteq\mathbb{R}^N$ è un compatto, $r>0$, e se indichiamo con $Q(x,r)$ il cubo aperto di $\mathbb{R}^N$ centrato in x ed inscritto nella palla $B(x,r)=\{z\in\mathbb{R}^N : |z-x|_N<r\}$, allora

$$K\subseteq\bigcup_{x\in\mathbb{Q}^N\cap K}Q(x,r)$$

dim. sia $x_0\in K$: poiché $\mathbb{Q}^N$ è denso in $\mathbb{R}^N$, esiste $x\in\mathbb{Q}^N\cap K$ tale che $x\in Q(x_0,r)$. Ne segue $x_0\in Q(x,r)$, ossia la tesi. □

Si noti che il ricoprimento trovato è numerabile.
Per il lemma di compattezza della scorsa lezione, esiste un sottoricoprimento finito.



Applichiamo questo lemma al compatto $\overline{A_1}$:

scelto $r = \frac{1}{2}$, vi è un ricoprimento finito di $\overline{A}_1$ fatto da cubi $Q_1^{(1)} \dots Q_{k_1}^{(1)}$ inscritti in palle di raggio $\frac{1}{2}$ centrate in punti di $\overline{A}_1$: quindi tali cubi sono tutti inclusi in A.
Analogamente, per ogni $n \geq 1$, il compatto $\overline{A_{n+1}} \setminus A_n$ è ricoperto da un numero finito $Q_1^{(n)} \dots Q_{k_n}^{(n)}$ inscritti in palle di raggio $\frac{1}{n+2}$ centrate in punti di $\overline{A_{n+1}} \setminus A_n$: quindi tali cubi, nuovamente, sono tutti contenuti in A. Ne segue

$$A \subseteq \overline{A}_1 \cup (\overline{A_2} \setminus A_1) \cup \dots \cup (\overline{A_{n+1}} \setminus A_n) \cup \dots \subseteq$$
$$\subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{h=1}^{k_n} Q_h^{(n)} \subseteq A,$$

quindi A è unione dei cubi aperti $Q_h^{(n)}$. □

Dunque la σ-algebra $\mathcal{M}_N$ contiene gli aperti e i chiusi; quindi contiene anche tutti gli insiemi ottenuti con operazioni di $\bigcup_{n \in \mathbb{N}}$, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}}$ e passaggio al complementare. La <u>minima σ-algebra</u> che contiene gli aperti è la σ-algebra $\mathcal{B}_N$ degli insiemi <u>boreliani</u>: si ha quindi $\mathcal{B}_N \subseteq \mathcal{M}_N$ (ed in effetti $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{M}_N$). Inoltre si dimostra che <u>non tutti</u> i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^N$ sono misurabili, ossia $\mathcal{M}_N \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$.

<u>Esercizi</u>

- $A, B \in \mathcal{M}_N$, $A \subseteq B$, $m_N(A) < \infty \Rightarrow m_N(B \setminus A) = m_N(B) - m_N(A)$.
- $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_1$ e $m_1(\mathbb{Q}) = 0$.
- L'insieme C di Cantor è misurabile e ha misura 0.
- Se $t \neq 0$ ed $E_t = \{x \in \mathbb{R}^N : \frac{x}{t} \in E\}$, allora $m_N^*(E_t) = |t|^N m_N^*(E)$.