Come sappiamo la misura di Lebesgue $m_N : \mathcal{M}_N \to [0,\infty]$ è semplicemente la restrizione a $\mathcal{M}_N$ della misura esterna m_N^*. Essa è monotona, numerabilmente subadditiva e numerabilmente additiva sui disgiunti.

Esercizio: dimostrare che per ogni $E, F \in \mathcal{M}_N$ vale la relazione
$$m_N(E) + m_N(F) = m_N(E \cup F) + m_N(E \cap F).$$

Dalla numerabile additività di m_N segue il buon comportamento di m_N rispetto alle successioni di insiemi misurabili monotone rispetto all'inclusione.

Proposizione Sia $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}_N$.
(i) Se $E_n \subseteq E_{n+1}$ per ogni n, allora $\lim_{n\to\infty} m_N(E_n) = m_N\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right)$.
(ii) Se $E_n \supseteq E_{n+1}$ per ogni n, ed esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $m_N(E_{n_0}) < \infty$, allora $\lim_{n\to\infty} m_N(E_n) = m_N\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n\right)$.

Si noti che la (ii) è falsa senza l'ipotesi che sia $m_N(E_{n_0}) < \infty$ per un certo $n_0 \in \mathbb{N}$: ad esempio, in $\mathbb{R}$ gli insiemi $E_n = [n, +\infty[$ hanno misura m_1 infinita per ogni n, ed intersezione vuota: ne segue
$$\lim_{n\to\infty} m_1(E_n) = +\infty > 0 = m_1\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n\right).$$

dim (i) Poniamo
$$F_0 = E_0, \qquad F_{n+1} = E_{n+1} \setminus E_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Gli F_n sono misurabili e disgiunti; inoltre

$$E_n = \bigcup_{k=0}^{n} F_k \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n .$$

Si ha allora

$$m_N\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = m_N\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} m_N(F_n) = (\text{per definizione}$$

$$\text{di serie}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} m_N(F_k) = \lim_{n\to\infty} m_N\left(\bigcup_{k=0}^{n} F_k\right) = \lim_{n\to\infty} m_N(E_n).$$

(ii) Per $n > n_0$ definiamo

$$G_n = E_{n_0} \setminus E_n .$$

Allora $G_n \subseteq G_{n+1}$ $\forall n > n_0$, e

$$\bigcup_{n > n_0} G_n = \bigcup_{n=n_0+1}^{\infty} (E_{n_0} \setminus E_n) = E_{n_0} \setminus \left(\bigcap_{n=n_0+1}^{\infty} E_n\right).$$

Per (i),

$$\lim_{n\to\infty} m_N(G_n) = m_N\left(\bigcup_{n>n_0} G_n\right).$$

Poiché $m_N(E_n) < \infty$ per ogni $n \geq n_0$, questa relazione si riscrive come

$$\lim_{n\to\infty} m_N(E_{n_0} \setminus E_n) = m_N(E_{n_0}) - \lim_{n\to\infty} m_N(E_n) = m_N(E_{n_0}) - m_N\left(\bigcap_{n=n_0+1}^{\infty} E_n\right),$$

da cui, semplificando,

$$m_N\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = m_N\left(\bigcap_{n=n_0+1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} m_N(E_n). \quad \square$$

A ulteriore conferma che la definizione di insieme misurabile è appropiata e "ben funzionante", diamo ora una caratterizzazione degli insiemi misurabili secondo Lebesgue in termini della loro "vicinanza" ad aperti e chiusi.

<u>Proposizione</u> Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$. Sono fatti equivalenti:

(i) $E \in \mathcal{M}_N$;

(ii) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un aperto $A \supseteq E$ tale che $m_N^*(A \setminus E) < \varepsilon$;

(iii) esiste un boreliano $B \supseteq E$ tale che $m_N(B \setminus E) = 0$;

(iv) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un chiuso $C \subseteq E$ tale che $m_N^*(E \setminus C) < \varepsilon$;

(v) esiste un boreliano $D \subseteq E$ tale che $m_N(E \setminus D) = 0$.

<u>dim</u> Proveremo (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i) e poi (i) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (i).

(i) $\Rightarrow$ (ii). Sia $E \in \mathcal{M}_N$ e supponiamo dapprima $m_N(E) < \infty$. Per definizione di $m_N(E) = m_N^*(E)$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}_N$ tale che $E \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} P_n$, i P_n sono aperti e $\sum_{n=0}^{\infty} v_N(P_n) < m_N(E) + \varepsilon$.
Posto $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, A è aperto e $A \supseteq E$. Per numerabile subadditività

$$m_N(A \setminus E) = m_N(A) - m_N(E) \le \sum_{n=0}^{\infty} m_N(P_n) - m_N(E) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} v_N(P_n) - m_N(E) < \varepsilon.$$

Supponiamo ora $m_N(E) = \infty$. Scriviamo $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E \cap Q_n)$, dove i Q_n sono parallelepipedi adiacenti tali che $\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n = \mathbb{R}^N$. Poiché $m_N(E \cap Q_n) < \infty$, per ogni n e per ogni ε esiste un aperto A_n contenente $E \cap Q_n$, tale che $m_N(A_n \setminus (E \cap Q_n)) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Consideriamo l'aperto $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$: esso contiene E e

$$m_N(A \setminus E) = m_N\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \setminus \bigcup_{m\in\mathbb{N}} (E \cap Q_m)\Big) \le m_N\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \setminus (E \cap Q_n))\Big) \le$$

$$\le \sum_{n\in\mathbb{N}} m_N(A_n \setminus E \cap Q_n) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \varepsilon.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Scelto $\varepsilon = \frac{1}{n}$, esiste un aperto $A_n \supseteq E$ tale che $m_N^*(A_n \setminus E) < \frac{1}{n}$. Poniamo $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$: B è un boreliano, $B \supseteq E$ e $m_N^*(B \setminus E) \leq m_N^*(A_n \setminus E) < \frac{1}{n}$ per ogni n. Se $n \to \infty$ si ottiene $m_N^*(B \setminus E) = 0$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Sia $B \in \mathcal{B}_N$ tale che $m_N(B \setminus E) = 0$. Allora, essendo $E = B \setminus (B \setminus E)$, E è misurabile perché differenza di insiemi misurabili.

(i) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (i): basta applicare le implicazioni precedenti a E^c, ed osservare che se C è chiuso $\subseteq E$, allora $E^c \subseteq C^c$ e $C^c \setminus E^c = E \setminus C$. $\square$

FUNZIONI MISURABILI

Dopo aver introdotto gli insiemi su cui fare gli integrali (gli insiemi misurabili) è il momento di introdurre le funzioni da integrare: le funzioni misurabili.

Considereremo funzioni $f: D \to \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$, ove $D \subseteq \mathbb{R}^N$ è un insieme misurabile. Perché funzioni a valori in $[-\infty, +\infty]$ e non solo a valori in $\mathbb{R}$? Perché è più comodo. Ricordiamo comunque la convenzione $0 \cdot \infty = 0$.

Anzitutto, una facile proposizione. Poniamo $\{f > \alpha\} := \{x \in D : f(x) > \alpha\}$.

Proposizione Sia $f: D \subseteq \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$, con D misurabile. I seguenti quattro enunciati sono equivalenti:

(i) $\{f>\alpha\}\in \mathcal{M}_N \quad \forall \alpha\in\mathbb{R}$;

(ii) $\{f\geq\alpha\}\in \mathcal{M}_N \quad \forall \alpha\in\mathbb{R}$;

(iii) $\{f<\alpha\}\in \mathcal{M}_N \quad \forall \alpha\in\mathbb{R}$;

(iv) $\{f\leq\alpha\}\in \mathcal{M}_N \quad \forall \alpha\in\mathbb{R}$

<u>dim</u> (i) $\Rightarrow$ (ii) $\{f\geq\alpha\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{f>\alpha-\frac{1}{n}\}$ è misurabile perché intersezione numerabile di misurabili.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $\{f<\alpha\}=\{f\geq\alpha\}^c$ misurabile perché complementare di misurabile.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) $\{f\leq\alpha\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{f<\alpha+\frac{1}{n}\}$.

(iv) $\Rightarrow$ (i) $\{f>\alpha\}=\{f\leq\alpha\}^c$. $\square$

<u>Definizione</u> Sia $D\in\mathcal{M}_N$. Diciamo che una funzione $f: D\to\overline{\mathbb{R}}$ è <u>misurabile</u> se vale una (quindi ciascuna) delle quattro condizioni della proposizione precedente.

<u>Esempi</u> (1) Se $D\in\mathcal{M}_N$, la <u>funzione indicatrice</u> di D

$$I_D(x)=\begin{cases}1 & \text{se } x\in D\\ 0 & \text{se } x\in D^c\end{cases}$$

è misurabile in $\mathbb{R}^N$, poiché

$$\{I_D>\alpha\}=\begin{cases}\emptyset & \text{se } \alpha\geq 1\\ D & \text{se } 0\leq\alpha<1\\ \mathbb{R}^N & \text{se } \alpha<0\end{cases}, \quad \text{quindi } \{I_D>\alpha\}\in\mathcal{M}_N\ \forall\alpha\in\mathbb{R}.$$

(2) Le *funzioni semplici* $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ sono funzioni che assumono un numero finito di valori su insiemi misurabili. Quindi

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j I_{D_j}(x) ,$$

ove $\alpha_1 \cdots \alpha_k \in \mathbb{R}$, e $D_j = \varphi^{-1}(\alpha_j) = \{\varphi = \alpha_j\}$.

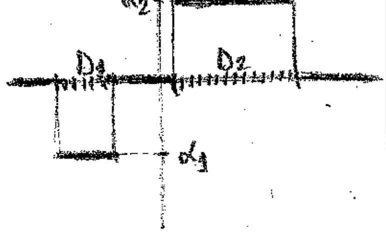
Si tratta di funzioni misurabili; facciamo la verifica nel caso di una funzione della forma

$$\varphi(x) = \alpha_1 I_{D_1}(x) + \alpha_2 I_{D_2}(x),$$

ove $D_1 = \{\varphi = \alpha_1\}$, $D_2 = \{\varphi = \alpha_2\}$ e, ad esempio, $\alpha_1 < 0 < \alpha_2$.

Si ha allora:

$$\{\varphi > \alpha\} = \begin{cases} \emptyset & \text{se } \alpha \geq \alpha_2 \\ D_2 & \text{se } \alpha_2 > \alpha \geq 0 \\ D_1^c & \text{se } 0 > \alpha \geq \alpha_1 \\ \mathbb{R}^N & \text{se } \alpha_1 > \alpha \end{cases}$$



quindi $\{\varphi > \alpha\} \in \mathcal{M}_N \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio Fare la verifica nel caso generale.

(3) Le funzioni $f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ continue, ove A è un aperto, sono misurabili. Infatti

$$\{f > \alpha\} = f^{-1}(]\alpha, \infty[)$$

è la controimmagine di un aperto di $\mathbb{R}$, quindi è un aperto, dato che f è continua. Poiché gli aperti sono misurabili, si ha la tesi.

(4) Se $N=1$, le funzioni $f: I \to \mathbb{R}$ monotone, ove I è un intervallo di $\mathbb{R}$, sono misurabili perché $\{f>\alpha\}$ è un intervallo per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, e gli intervalli (i "parallelepipedi" di $\mathbb{R}$) sono misurabili.

<u>Proposizione</u> Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili. Allora

$$\sup_n f_n, \quad \inf_n f_n, \quad \max\lim_{n\to\infty} f_n, \quad \min\lim_{n\to\infty} f_n$$

sono funzioni misurabili.

Ricordiamo che

$$[\sup_n f_n](x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \{f_n(x)\}, \quad [\inf_n f_n](x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \{f_n(x)\},$$

$$\max\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{m\geq n} f_m(x) = \lim_{n\to\infty} \sup_{m\geq n} f_m(x),$$

$$\min\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{m\geq n} f_m(x) = \lim_{n\to\infty} \inf_{m\geq n} f_m(x).$$

<u>dim</u> Basta osservare che

$$\left\{\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n > \alpha\right\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{f_n > \alpha\}, \ \forall \alpha\in\mathbb{R},$$

$$\left\{\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n < \alpha\right\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{f_n < \alpha\} \ \forall \alpha\in\mathbb{R}.$$

Gli ultimi due casi si deducono da questi: infatti, per ogni $n\in\mathbb{N}$, $g_n(x) := \sup_{m\geq n} f_m(x)$ è misurabile; ne segue $\inf_n g_n$ misurabile. Similmente, per ogni $n\in\mathbb{N}$, $h_n(x) := \inf_{m\geq n} f_m(x)$ è misurabile; ne segue $\sup_n h_n$ misurabile. □

Corollario. Se $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di funzioni misurabili su D, ed esiste $f: D \to \overline{\mathbb{R}}$ tale che $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ per ogni $x \in D$, allora f è misurabile.

dim Infatti, quando il limite esiste, si ha $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x)$. $\square$

La seguente proposizione dà un'altra caratterizzazione (molto comoda) delle funzioni misurabili.

Proposizione Sia $D \in \mathcal{M}_N$ e sia $f: D \to \overline{\mathbb{R}}$. Allora f è misurabile se e solo se esiste una successione $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di funzioni semplici che converge a f puntualmente in D.

dim. ($\Leftarrow$) già noto.

($\Rightarrow$) Per ogni $x \in D$ poniamo:

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} n & \text{se } f(x) > n \\ \frac{k-1}{2^n} & \text{se } \frac{k-1}{2^n} < f(x) \le \frac{k}{2^n} \quad (k = 1, 2, \dots, n2^n) \\ 0 & \text{se } f(x) = 0 \\ \frac{k}{2^n} & \text{se } \frac{k-1}{2^n} \le f(x) < \frac{k}{2^n} \quad (k = 0, -1, -2, \dots, -n2^n+1) \\ -n & \text{se } f(x) < -n \end{cases}$$

e poi mettiamo $\varphi_n = 0$ su D^c. Allora φ_n è semplice, $\varphi_n(x) \to f(x)$ per ogni $x \in D$. $\square$

Osservazione Si noti che, in più, $|\varphi_n| \le |f|$, che se $f \ge 0$ allora $0 \le \varphi_n \le f$, che se f è limitata allora $\varphi_n \to f$ uniformemente in D. Inoltre, posto

$B_n = \{x \in \mathbb{R}^N : |x|_N \leq n\}$, le funzioni semplici

$$\psi_n(x) = \varphi_n(x) I_{B_n}(x)$$

verificano

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(x) = f(x) \quad \forall x \in D,$$

e in più (come spesso è comodo supporre), ciascuna ψ_n è nulla fuori di un compatto.

<u>Proposizione</u> Se $f, g : D \to \overline{\mathbb{R}}$ sono misurabili, lo sono anche $f+g$, fg, $f \vee g$, $f \wedge g$, $\frac{f}{g}$ (ciascuna sul proprio dominio).

<u>dim</u> Per la proposizione precedente, esistono due successioni di funzioni semplici $\{\varphi_n\}$, $\{\psi_n\}$ tali che

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x), \quad \lim_{n\to\infty} \psi_n(x) = g(x).$$

Se non si ha simultaneamente $f(x) = -g(x) = \pm\infty$ (questo è il dominio di $f+g$), allora

$$f(x) + g(x) = \lim_{n\to\infty} \{\varphi_n(x) + \psi_n(x)\},$$

e poiché $\varphi_n + \psi_n$ è semplice, $f+g$ risulta misurabile.

Similmente, se non si ha simultaneamente $f=0$ e $g=\pm\infty$ né $f=\pm\infty$ e $g=0$ (questo è il dominio di fg), allora

$$f(x) g(x) = \lim_{n\to\infty} \{\varphi_n(x) \psi_n(x)\}$$

ed essendo $\varphi_n \psi_n$ semplice, fg risulta misurabile.

Poi, ricordando che $f\vee g(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ e $f\wedge g(x) = \min\{f(x), g(x)\}$, si vede subito che

$$f\vee g(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n \vee \psi_n(x), \quad f\wedge g(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n \wedge \psi_n(x);$$

poiché $\varphi_n \vee \psi_n$ e $\varphi_n \wedge \psi_n$ sono semplici, $f\vee g$ e $f\wedge g$ risultano misurabili.

Infine, se $g(x) \neq 0$, allora deve essere definitivamente $\psi_n(x) \neq 0$ (visto che $\lim_{n\to\infty} \psi_n(x) = g(x)$); quindi $\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi_n(x)}{\psi_n(x)}$. □

<u>ESERCIZI</u>

1. Sia $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}$, ove $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua e non negativa. Provare che T è misurabile e
$$m_2(T) = \int_a^b f(x)\,dx .$$
2. Se f è misurabile, gli insiemi $\{f = +\infty\}$, $\{f = -\infty\}$ sono misurabili.
3. Se f, g sono misurabili, l'insieme $\{f = g\}$ è misurabile.
4. Sia $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabile; sia $g : D \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione tale che $\{x \in D : f(x) \neq g(x)\}$ sia misurabile con misura nulla. Si provi che g è misurabile.
5. Sia f misurabile, allora $\{f = \alpha\}$ è misurabile per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
6. Se f è misurabile, allora $|f|$ è misurabile.
7. Sia $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ differenziabile. Si provi che $D_i f$ è misurabile, $1 \le i \le N$.

8. Per $x \in [0,1]$ sia $\alpha_i(x)$ la i-esima cifra dello sviluppo decimale di x, convenendo di escludere gli sviluppi finiti sostituendoli con sviluppi con cifre definitivamente uguali a 9 (esempio: $\frac{1}{2} = 0.5 = 0.4\bar{9}$). Si provi che $\alpha_i(x)$ è misurabile per ogni $i = 1, 2, \dots$ (11)