Analisi Matematica II - 2014-2015

Ingegneria Civile, Ambientale, Edile

Paolo Acquistapace, Vincenzo M. Tortorelli

FOGLIO DI ESERCIZI n. 5, dal 2 marzo al 12 marzo 2015

Esercizio 1 (a) Dimostrare che l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali è misurabile secondo Lebesgue ed ha misura nulla.

(b) Si trovi un sottoinsieme chiuso (quindi misurabile) con parte interna vuota e di misura positiva mediante la seguente costruzione (*razionali ingrassati*): sia $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una numerazione dei numeri razionali compresi tra 0 ed 1; fissato $\varepsilon > 0$ si ponga

$$\mathbb{Q}_\varepsilon = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left]q_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^n}\right[\,.$$

Verificare che $\mathbb{Q}_\varepsilon$ è misurabile e trovare una stima dall'alto della misura di $\mathbb{Q}_\varepsilon$.

(c) Si mostri che l'indicatrice di $[0,1] \setminus \mathbb{Q}_\varepsilon$ è una funzione misurabile, e si calcoli l'area del suo sottografico.

Esercizio 2 Fissati $\rho \neq 0$, $x \in \mathbb{R}^N$, e $E, F \subset \mathbb{R}^N$, si definisca

$$\rho\, E = \left\{ y \in \mathbb{R}^N :\ \frac{y}{\rho} \in E \right\},$$

$$x + F = \{y \in \mathbb{R}^n :\ y - x \in F\},$$

$$E + F = \{y \in \mathbb{R}^N : \exists e \in E, f \in F :\ y = e + f\} = \bigcup_{e\in E}(e + F).$$

Mostrare che se E ed F sono misurabili, allora lo sono anche $\rho\, E$, $x + F$, $E + F$; si provi anche che $m_N(\rho\, E) = |\rho|^N m_N(E)$ e $m_N(x + F) = m_N(F)$.

Esercizio 3 L'iniseme di Cantor C è l'insieme dei numeri in $[0, 1]$ che si *possono* scrivere in base 3 senza mai usare la cifra 1:

$$C = \left\{ x \in [0,1] :\ x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{3^n} \text{ con } \alpha_n \in \{0, 2\}\ \forall n \in \mathbb{N}^+ \right\}.$$

(a) Provare che C si ottiene anche nel modo seguente:

$$C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n,$$

ove

$$\begin{cases} C_0 = [0,1] \\ C_{n+1} = \dfrac{1}{3}C_n \cup \left(\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3}C_n\right), \end{cases}$$

e che la successione di insiemi $\{C_n\}$ è decrescente rispetto all'inclusione.

(b) Mostrare che C è misurabile ed ha misura m_1 nulla.

Esercizio 4 Sia $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri *positivi* tali che $\sum_n 2^n\beta_n < 1$. Si definiscano per ricorrenza i sottoinsiemi G_n, ognuno unione di un numero finito di sotto-intervalli disgiunti: $G_0 = [0,1]$, e G_{n+1} si ottiene da G_n togliendo da ciascun sotto-intervallo di G_n la parte centrale di ampiezza β_n.

(a) Si provi che la costruzione è sempre possibile nelle ipotesi date.

(b) Si provi che le funzioni indicatrici degli insiemi G_n convergono puntualmente alla indicatrice di un insieme misurabile G (*insieme di Cantor grasso*).

(c) Si provi che tale funzione anche se modificata su un insieme di misura nulla non può diventare integrabile secondo Riemann in $[0,1]$.

(d) Per ogni intervallo aperto $I \subseteq [0,1]$, se $I \cap G \neq \emptyset$ allora $0 < m_1(I\cap G) < m_1(I)$.

Esercizio 5 (a) Se $A \subset B \subset \mathbb{R}^N$ sono misurabili e $m_N(A) < \infty$, allora $m_N(B\setminus A) = m_N(B) - m_N(A)$.

(b) Se $A, B \subseteq \mathbb{R}^N$ sono misurabili, allora $m_N(B) + m_N(A) = m_N(A\cup B) + m_N(A\cap B)$.

Esercizio 6 (a) Il sottografico di una funzione continua non negativa su un intervallo chiuso limitato di $\mathbb{R}$ è misurabile e la sua misura è l'integrale secondo Riemann della funzione.

(b) Il sottografico di una funzione continua non negativa su un intervallo chiuso di $\mathbb{R}$ è misurabile, e la sua misura è l'integrale di Riemann in senso generalizzato della funzione.

Esercizio 7 (a) Se $f : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$ è misurabile, allora $\{f = +\infty\}$ e $\{f = -\infty\}$ sono insiemi misurabili.

(b) Se f e g sono funzioni misurabili allora $\{f = g\}$ è un insieme misurabile.

(c) Se f è misurabile, allora per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{f = \alpha\}$ è misurabile.

(d) Se f è misurabile e $\{f = g\}$ è un insieme di misura nulla allora anche g è misurabile.

(e) Se f è misurabile allora $|f|$ è misurabile.

Esercizio 8 Se f è una funzione differenziabile, allora f e le sue derivate parziali sono funzioni misurabili.

Esercizio 9 Per $x \in [0,1]$ sia $\alpha_i(x)$ la i-esima cifra dello sviluppo decimale infinito di x (si sostituiscono gli allineamenti decimali finiti con quelli infiniti di periodo 9: ad esempio, $0.234 = 0.233\overline{9}$). Si provi che per ogni i la funzione α_i è misurabile.

Esercizio 10 (a) Siano A, B aperti di $\mathbb{R}^N$. Si provi che una funzione Lipschitziana da A in B trasforma insiemi di misura m_N nulla in insiemi di misura m_N nulla.

(b) Si provi che se una funzione continua da A in B trasforma insiemi di misura m_N nulla in insiemi di misura m_N nulla, allora essa trasforma insiemi misurabili di $\mathbb{R}^N$ in insiemi misurabili di $\mathbb{R}^N$ (si ricordi che ogni misurabile è unione di un insieme di misura nulla e di un insieme boreliano che è unione numerabile di compatti).