Analisi 2 Lu 16/3/15

L'integrale di Lebesgue

Cominciamo a definire l'integrale per funzioni semplici. Sia

$S_0 = \{\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} : \varphi$ è semplice e nulla fuori da un insieme di misura finita$\}$

Definizione Sia $\varphi(x) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j I_{D_j}(x)$, ove $\alpha_j \in \mathbb{R}$ e $D_j \in \mathcal{M}_N$, con $m_N(D_j) < \infty$ per $j = 1 \dots k$, e $D_j = \{x \in \mathbb{R}^N : \varphi(x) = \alpha_j\}$.
L'integrale di φ su $\mathbb{R}^N$ è il numero reale

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)\,dx = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j m_N(D_j).$$

Le proprietà dell'integrale su S_0 sono le seguenti:

Proposizione Siano $\varphi, \psi \in S_0$. Allora:
(i) se $\varphi \le \psi$ in $\mathbb{R}^N$, allora $\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)\,dx \le \int_{\mathbb{R}^N} \psi(x)\,dx$ (monotonia);
(ii) $\int_{\mathbb{R}^N} [\lambda\varphi(x) + \mu\psi(x)]\,dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)\,dx + \mu \int_{\mathbb{R}^N} \psi(x)\,dx \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
(linearità).

dim (i) Siano $\varphi(x) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j I_{D_j}(x)$, $\psi(x) = \sum_{h=1}^{m} \beta_h I_{E_h}(x)$,
con $D_j = \{\varphi = \alpha_j\}$ e $E_h = \{\psi = \beta_h\}$. Allora il fatto che $\varphi \le \psi$ si traduce nelle relazioni

$$\alpha_j \le \beta_h \quad \forall j, h \text{ tali che } D_j \cap E_h \ne \emptyset.$$

Conviene porre $D_0 = \mathbb{R}^N \setminus \bigcup_{j=1}^{k} D_j$, $E_0 = \mathbb{R}^N \setminus \bigcup_{h=1}^{m} E_h$, $\alpha_0 = \beta_0 = 0$
e scrivere $\varphi = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j I_{D_j}$, $\psi = \sum_{h=1}^{m} \beta_h I_{E_h}$ (non cambia nulla).

Allora per additività di m_N

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)dx = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j\, m_N(D_j) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \sum_{h=0}^{m} m_N(D_j \cap E_h) =$$

$$= \sum_{h=0}^{m} \sum_{j=0}^{k} \alpha_j\, m_N(D_j \cap E_h) \leq \sum_{h=0}^{m} \sum_{j=0}^{k} \beta_h\, m_N(D_j \cap E_h) =$$

$$= \sum_{h=0}^{m} \beta_h \sum_{j=0}^{k} m_N(D_j \cap E_h) = \sum_{h=0}^{m} \beta_h\, m_N(E_h) = \int_{\mathbb{R}^N} \psi(x)dx.$$

(ii) Si ha

$$\lambda\varphi(x) + \mu\psi(x) = \sum_{j=0}^{k} \sum_{h=0}^{m} [\lambda\alpha_j + \mu\beta_h]\, I_{D_j \cap E_h}(x),$$

e dunque

$$\int_{\mathbb{R}^N} [\lambda\varphi(x) + \mu\psi(x)]dx = \sum_{j=0}^{k} \sum_{h=0}^{m} [\lambda\alpha_j + \mu\beta_h]\, m_N(D_j \cap E_h) =$$

$$= \lambda \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \sum_{h=0}^{m} m_N(D_j \cap E_h) + \mu \sum_{h=0}^{m} \beta_h \sum_{j=0}^{k} m_N(D_j \cap E_h) =$$

$$= \lambda \sum_{j=0}^{k} \alpha_j\, m_N(D_j) + \mu \sum_{h=0}^{m} \beta_h\, m_N(E_h) =$$

$$= \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)dx + \mu \int_{\mathbb{R}^N} \psi(x)dx. \quad \square$$

Passiamo ora a definire l'integrale per una funzione misurabile. Bisogna distinguere fra le funzioni non negative e quelle che cambiano segno.

<u>Definizione</u> Sia $f : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione misurabile.

(i) Se $f \geq 0$, il suo integrale è il numero (finito, o $+\infty$)

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)dx = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)dx : \varphi \in S_0,\ 0 \leq \varphi \leq f \right\}$$

(ii) Se $f \geq 0$ e $D \in \mathcal{M}_N$, il suo integrale su D è il numero (finito o $+\infty$)

$$\int_D f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(x) I_D(x)\, dx \quad [\text{definito in (i)}].$$

(iii) Se f cambia segno, poniamo $f^+ = \max\{f, 0\}$, $f^- = -\min\{f, 0\}$; diciamo che f è <u>integrabile</u> se almeno uno fra $\int_{\mathbb{R}^N} f^+ dx$, $\int_{\mathbb{R}^N} f^- dx$ [definiti in (i)] è finito, ed in tal caso

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^N} f^+(x)dx - \int_{\mathbb{R}^N} f^-(x)dx.$$

Se l'integrale così definito è finito, diciamo che f è <u>sommabile</u>.

(iv) Se f cambia segno e $D \in \mathcal{M}_N$, diciamo che f è integrabile su D se almeno uno fra $\int_D f^+ dx$, $\int_D f^- dx$ [definiti in (ii)] è finito, e in tal caso

$$\int_D f(x)dx = \int_D f^+ dx - \int_D f^- dx.$$

Se l'integrale così definito è finito, diciamo che f è sommabile su D.

<u>Osservazioni</u> (1) Se f ha segno costante, gli integrali

$$\int_{\mathbb{R}^N} f\,dx, \quad \int_D f\,dx$$

esistono sempre, finiti o infiniti.

(2) L'integrale è <u>monotono</u>: se f, g sono integrabili su D e $f \le g$, allora

$$\int_D f\,dx \le \int_D g\,dx.$$

Infatti, se $0 \le f \le g$ ciò segue dalla definizione perché ci sono più funzioni semplici fra 0 e gI_D che fra 0 e fI_D. Se f e g cambiano segno, da $f \le g$ segue sempre $f^+ \le g^+$ e $f^- \ge g^-$; quindi, per (1),

$$\int_D f^+\,dx - \int_D f^-\,dx \le \int_D g^+\,dx - \int_D g^-\,dx.$$

(3) In particolare, da (2) segue che se f è integrabile su D, allora

$$\left|\int_D f\,dx\right| \le \int_D |f|\,dx.$$

(4) Se f è integrabile su D, e $E \subseteq D$ è misurabile, allora f è integrabile su E.

Infatti $f^+ I_E \le f^+ I_D$, $f^- I_E \le f^- I_D$. Poiché uno almeno fra $\int_{\mathbb{R}^N} f^+ I_D\,dx$, $\int_{\mathbb{R}^N} f^- I_D\,dx$ è finito, lo stesso vale per gli integrali di $f^+ I_E$ e $f^- I_E$.

In particolare, se $f \ge 0$ e $E \subseteq D$, allora

$$\int_E f\,dx \le \int_D f\,dx.$$

<u>Proposizione</u> Se $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$ con i D_n misurabili e disgiunti, e se f è integrabile su D, allora

$$\int_D f\,dx = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{D_n} f\,dx .$$

<u>dim</u>. Ci limitiamo al caso in cui f è sommabile su D.
Se $f = I_E$, $E \in \mathcal{M}_N$, allora

$$\int_D f\,dx = m_N(D \cap E) = \sum_{n \in \mathbb{N}} m_N(D_n \cap E) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{D_n} f\,dx .$$

Se $f \in S_0$, $f = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i I_{E_i}$, si ha per linearità

$$\int_D f\,dx = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i m_N(D \cap E_i) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \sum_{n \in \mathbb{N}} m_N(D_n \cap E_i) =$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^{p} \alpha_i m_N(D_n \cap E_i) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{D_n} f\,dx .$$

Se $f \geq 0$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\varphi \in S_0$ tale che $0 \leq \varphi \leq f I_D$ e

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi\,dx > \int_D f\,dx - \varepsilon .$$

Poiché $0 \leq \varphi I_{D_n} \leq f I_{D_n}$,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{D_n} f\,dx \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi I_{D_n} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{D_n} \varphi\,dx = \int_D \varphi\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi\,dx > \int_D f\,dx - \varepsilon ,$$

con ε arbitrario. Quindi

$$\int_D f\,dx \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{D_n} f\,dx .$$

Per la disuguaglianza opposta, per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $\varphi_n \in S_0$, tale che $0 \leq \varphi_n \leq f I_{D_n}$ e

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_n\,dx > \int_{D_n} f\,dx - \frac{\varepsilon}{2^n} .$$

Allora, posto $\psi_m = \sum_{n=0}^{m} \varphi_n$, si ha $\psi_m \in S_0$, $0 \le \psi_m \le f I_D$ e quindi

$$\int_D f\,dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} \psi_m\,dx = \sum_{n=0}^{m} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_n\,dx \geq \sum_{n=0}^{m} \left[\int_{D_n} f\,dx - \frac{\varepsilon}{2^n} \right] \geq$$

$$\geq \sum_{n=0}^{m} \int_{D_n} f\,dx - 2\varepsilon .$$

Per $m \to \infty$, essendo ε arbitrario, si ha

$$\int_D f\,dx \geq \sum_{n=0}^{\infty} \int_D f\,dx .$$

Se f cambia segno, si scrive l'uguaglianza per f^+ e f^-, e poi si sottrae. $\square$

<u>Corollario</u> Sia $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ integrabile. Se $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}_N$, con $E_n \subseteq E_{n+1} \subseteq D$, allora

$$\int_{\bigcup_n E_n} f\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f\,dx .$$

<u>dim</u> Posto $D_0 = E_0$, $D_{n+1} = E_{n+1} \setminus E_n$, i D_n sono misurabili, disgiunti, con $D_n = \bigcup_{k=0}^{n} E_k$. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Perciò

$$\int_{\bigcup_n E_n} f\,dx = \int_{\bigcup_n D_n} f\,dx = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{D_n} f\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_{D_k} f\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f\,dx . \ \square$$

<u>Proposizione</u> L'integrale è lineare: cioè, se f, g sono sommabili su D e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, allora

$$\int_D (\lambda f + \mu g)\,dx = \lambda \int_D f\,dx + \mu \int_D g\,dx .$$

dim. Proviamo separatamente che

(i) $\int_D \lambda f\,dx = \lambda \int_D f\,dx \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$, (omogeneità)

(ii) $\int_D (f+g)\,dx = \int_D f\,dx + \int_D g\,dx$ (additività)

Proviamo (i). Se $\lambda = 0$, la tesi è banale. Sia $\lambda > 0$: per $f \geq 0$

$$\int_D \lambda f\,dx = \sup\left\{ \int_{\mathbb{R}^N} \varphi\,dx : \varphi \in S_0,\ 0 \leq \varphi \leq \lambda f I_D \right\} =$$

$$= \sup\left\{ \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\varphi}{\lambda}\,dx : \frac{\varphi}{\lambda} \in S_0,\ 0 \leq \frac{\varphi}{\lambda} \leq f I_D \right\} =$$

$$= \lambda \sup\left\{ \int_{\mathbb{R}^N} \psi\,dx : \psi \in S_0,\ 0 \leq \psi \leq f I_D \right\} = \lambda \int_D f\,dx;$$

per f di segno non costante, si ha $(\lambda f)^+ = \lambda f^+$ e $(\lambda f)^- = \lambda f^-$, da cui

$$\int_D \lambda f\,dx = \int_D (\lambda f)^+ dx - \int_D (\lambda f)^- dx = \int_D \lambda f^+ dx - \int_D \lambda f^- dx = \lambda \left[\int_D f^+ dx - \int_D f^- dx \right],$$

che è la tesi. Se $\lambda = -1$, allora $(-f)^+ = f^-$, $(-f)^- = f^+$ e dunque

$$\int_D (-f)\,dx = \int_D (-f)^+ dx - \int_D (-f)^- dx = \int_D f^- dx - \int_D f^+ dx = -\int_D f\,dx.$$

Infine se $\lambda < 0$ basta scrivere $\lambda = -|\lambda|$ e applicare i due casi precedenti.

Proviamo (ii). Distinguiamo 4 casi:

(I) $f \geq 0$, $g \geq 0$; (II) $f \leq 0$, $g \leq 0$; (III) $f \geq 0$, $g \leq 0$;

(IV) f, g arbitrarie.

Nel caso (I), siano $\varphi, \psi \in S_0$ con $0 \leq \varphi \leq f I_D$ e $0 \leq \psi \leq g I_D$:

allora $0 \le \varphi + \psi \le (f+g) I_D$, da cui

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} \psi\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} (\varphi+\psi)\,dx \le \int_D (f+g)\,dx\,;$$

passando all'estremo superiore rispetto a φ e ψ, si trova

$$\int_D f\,dx + \int_D g\,dx \le \int_D (f+g)\,dx.$$

La disuguaglianza opposta è meno semplice. Sia $\eta \in S_0$ tale che $0 \le \eta \le (f+g) I_D$ e sia $\beta \in]0,1[$; allora si ha a maggior ragione $0 \le \beta\eta \le (f+g) I_D$. Inoltre

$$0 \le \beta\eta(x) < [f(x)+g(x)]\, I_D(x) \qquad \text{se } f(x)+g(x) > 0,$$

$$0 = \beta\eta(x) = [f(x)+g(x)]\, I_D(x) \qquad \text{se } f(x)+g(x) = 0.$$

Siano $\{\varphi_n\}, \{\psi_n\}$ due successioni di funzioni semplici che tendono crescendo a $f I_D$ e $g I_D$; allora per ogni $x \in D$ si ha, definitivamente,

$$0 \le \beta\eta(x) \le \varphi_n(x) + \psi_n(x) \le [f(x)+g(x)]\, I_D.$$

Ciò significa che, posto

$$A_n = \{x \in D : \beta\varphi(x) \le \varphi_n(x) + \psi_n(x)\}$$

risulta

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = D.$$

Perciò, essendo per monotonia

$$\beta \int_{A_n} \eta\,dx = \int_{A_n} \beta\eta\,dx \le \int_{A_n} (\varphi_n + \psi_n)\,dx = \int_{A_n} \varphi_n\,dx + \int_{A_n} \psi_n\,dx \le \int_D f\,dx + \int_D g\,dx,$$

al limite per $n \to \infty$ si trova

$$\beta \int_D \eta\, dx \le \int_D f dx + \int_D g dx .$$

Per $\beta \to 1$

$$\int_D \eta\, dx \le \int_D f dx + \int_D g dx ;$$

passando all'estremo superiore rispetto a η, otteniamo finalmente

$$\int_D (f+g) dx \le \int_D f dx + \int_D g dx .$$

Nel caso (II), si applica (I) a $-f, -g$ e poi si usa l'omogeneità.

Nel caso (III), poniamo $S^+ = \{(f+g) I_D \geq 0\}$, $S^- = \{(f+g) I_D < 0\}$, e osserviamo che

$$f = (f+g) + (-g) \quad \text{in } S^+ \ (\text{somma di due funzioni} \geq 0)$$

$$g = (f+g) + (-f) \quad \text{in } S^- \ (\text{somma di due funzioni} \leq 0).$$

Ne segue, per (I) e (II) e per omogeneità,

$$\int_{S^+} f dx = \int_{S^+} (f+g) dx - \int_{S^+} g\, dx , \quad \int_{S^-} g dx = \int_{S^-} (f+g) dx - \int_{S^-} f dx .$$

Quindi

$$\int_D f dx + \int_D g dx = \int_{S^+} f dx + \int_{S^-} f dx + \int_{S^+} g dx + \int_{S^-} g dx =$$

$$= \int_{S^+} (f+g) dx - \int_{S^+} g dx + \int_{S^-} f dx + \int_{S^+} g dx + \int_{S^-} (f+g) dx - \int_{S^-} f dx =$$

$$= \int_{S^+} (f+g) dx + \int_{S^-} (f+g) dx = \int_D (f+g)^+ dx - \int_D (f+g)^- dx = \int_D (f+g) dx .$$

Infine, nel caso ($\boxed{IV}$), poniamo

$$F^+=\{fI_D\geq 0\},\ F^-=\{fI_D<0\},\ G^+=\{gI_D\geq 0\},\ G^-=\{gI_D<0\},$$

e osserviamo che $F^+\cap G^+$, $F^+\cap G^-$, $F^-\cap G^+$, $F^-\cap G^-$ sono misurabili e disgiunti; su ciascuno di tali insiemi vale la tesi in virtù di (I), (II) e (III). Sommando le quattro uguaglianze si ha la tesi □

<u>Osservazione</u>: Se f,g sono integrabili su D, allora vale

$$\int_{D'} f\,dx+\int_{D'} g\,dx=\int_{D'}(f+g)\,dx,$$

ove $D'=D\setminus\{x\in D:\ f(x)=-g(x)=\pm\infty\}$. La dimostrazione è la stessa, con qualche cautela in più (per non sommare mai $+\infty-\infty$).