Passaggio al limite sotto il segno di integrale.

Anzitutto: diciamo che una proprietà $p(x)$ è vera *quasi ovunque* in D, $D \in \mathcal{M}_N$, se, detto $P = \{x \in D : p(x) \text{ è vera}\}$, si ha $m_N(D \setminus P) = 0$ (e dunque $P \in \mathcal{M}_N$).

Esempi: (1) Se f è misurabile su D e se $g : D \to \overline{\mathbb{R}}$ verifica $f = g$ q.o. in D, allora sappiamo già che g è misurabile.

(2) Se $f \geq 0$ in D, f è sommabile e se in un sottoinsieme $K \subseteq D$ (misurabile) si ha $\int_K f\,dx = 0$, allora $f = 0$ q.o. in K.

[infatti, $0 = \int_K f\,dx \geq \int_{K_n} f\,dx \geq \frac{1}{n} m_N(K_n)$, ove $K_n = \{x \in K : f(x) \geq \frac{1}{n}\}$; ne segue $m_N(K_n) = 0$ per ogni n, e quindi

$$\{x \in K : f(x) > 0\} = \bigcup_n^{\infty} K_n \text{ ha misura nulla}$$
]

(3) Se D è misurabile e $K \subset D$ è un insieme di misura nulla, allora per ogni $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ integrabile si ha

$$\int_D f\,dx = \int_{D \setminus K} f\,dx.$$

Infatti, $\int_K f^+ dx = \int_K f^- dx = 0$ perché per ogni $g \geq 0$ su K misurabile si ha

$$\int_K g\,dx = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} \varphi\,dx : 0 \leq \varphi \leq g I_K \right\};$$

ma tali φ sono tutte q.o. nulle, quindi $\int_K g\,dx = \sup 0 = 0$.

Teorema (di B. Levi, o della convergenza monotona) (2)

Sia $D \in \mathcal{M}_N$, e sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili definite su D, tali che $0 \le f_n \le f_{n+1}$ q.o. in D.

Allora:

(i) $\exists\ f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ q.o. in D,

(ii) $\exists\ \lim_{n\to\infty} \int_D f_n\,dx = \int_D f\,dx$

dim. Posto $P_n = \{f_n < 0\}$, $Q_n = \{f_n > f_{n+1}\}$, si ha $m_N(P_n) = 0$ e $m_N(Q_n) = 0$ per ogni n. Quindi $P = \bigcup_n (P_n \cup Q_n)$ ha misura nulla e su $D \setminus P$ si ha $0 \le f_n \le f_{n+1}$ per ogni n. Quindi in $D\setminus P$ esiste $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ ed è misurabile, la estendiamo a tutto D mettendola uguale a 0, e gli integrali, fatti su D o su $D \setminus P$, sono gli stessi.

Inoltre, per monotonia, $\exists\ \lim_{n\to\infty} \int_D f_n\,dx \le \int_D f\,dx$.

Proviamo l'altra disuguaglianza. Sia $\varphi \in S_0$ tale che $0 \le \varphi \le f I_D$.

Sia $\beta \in]0,1[$; allora

$$0 \le \beta\varphi(x) < f(x) \quad \text{se } f(x) > 0,$$
$$0 = \beta\varphi(x) = f(x) \quad \text{se } f(x) = 0.$$

Poiché $0 \le f_n(x) \le f(x)$ e $f_n(x) \to f(x)$, si avrà definitivamente

$$0 \le \beta\varphi(x) \le f_n(x) \le f(x) \quad \forall x \in D;$$

dunque posto $A_n = \{\beta\varphi \le f_n\}$ si ha

$$A_n \subseteq A_{n+1}, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = D.$$

Perciò

$$\beta\int_{A_n}\varphi\,dx=\int_{A_n}\beta\varphi\,dx\le\int_{A_n}f_n\,dx\le\int_D f_n\,dx\quad\forall n\in\mathbb{N},$$

e per $n\to\infty$

$$\beta\int_D\varphi\,dx\le\lim_{n\to\infty}\int_D f_n\,dx.$$

Passando all'estremo superiore rispetto a φ, e mandando $\beta\to 1$, si ottiene

$$\int_D f\,dx\le\lim_{n\to\infty}\int_D f_n\,dx.\quad\square$$

<u>Osservazioni</u>: se togliamo dal teorema l'ipotesi $0\le f_n$, la tesi è falsa: in $\mathbb{R}$, le funzioni $f_n=-I_{[n,\infty[}$ soddisfano $f_n\le f_{n+1}\le 0$; si ha $f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0$, ma

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}f_n\,dx=\lim_{n\to\infty}(-\infty)=-\infty,\quad\text{mentre}\quad\int_{\mathbb{R}}f\,dx=\int_{\mathbb{R}}0\,dx=0.$$

Se invece togliamo l'ipotesi $f_n\le f_{n+1}$, la tesi è falsa lo stesso: in $\mathbb{R}$, le funzioni $f_n=I_{[n,n+1]}$ verificano $0\le f_n\not\le f_{n+1}$, e si ha $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0$ ma

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}f_n\,dx=\lim_{n\to\infty}1=1>0=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}f\,dx.$$

<u>Lemma di Fatou</u> Sia $D\in\mathcal{M}_N$, sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili, q.o. ≥ 0 in D. Allora, posto $f(x)=\operatorname{min\,lim}_{n\to\infty}f_n(x)$, si ha

$$\int_D f\,dx\le\operatorname{min\,lim}_{n\to\infty}\int_D f_n\,dx.$$

dim. Ricordando che $f(x) = \min\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \inf_{m\geq n} f_m(x)$,
poniamo $g_n(x) = \inf_{m\geq n} f_m(x)$, cosicché

$0 \leq g_n \leq g_{n+1}$ q.o. in D (cioè nell'insieme $D\setminus D'$, ove
$D' = \bigcup_n \{f_n < 0\}$ per ipotesi ha misura nulla). Per il teorema
di B. Levi

$$\lim_{n\to\infty} \int_D g_n \, dx = \int_D f \, dx .$$

Poiché $g_n \leq f_n$, otteniamo

$$\int_D f\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_D g_n\, dx = \min\lim_{n\to\infty} \int_D g_n\, dx \leq \min\lim_{n\to\infty} \int_D f_n\, dx . \qquad \square$$

Teorema (di Lebesgue, o di convergenza dominata). Sia $D \in \mathcal{M}_N$ e sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili, tali che:

(i) $\exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ q.o. in D;

(ii) $\exists\, g : D \to \overline{\mathbb{R}}$ sommabile, tale che $|f_n(x)| \leq g(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ q.o. in D.

Allora

$$\exists \lim_{n\to\infty} \int_D f_n\, dx = \int_D f\, dx ,$$

ed anzi, di più,

$$\lim_{n\to\infty} \int_D |f_n - f|\, dx = 0 .$$

dim Consideriamo (su $D\setminus D'$, ove $D' = \bigcup_n \left(\{|f_n| > g\} \cup \{f_n \not\to f\}\right)$ ha misura nulla per ipotesi) le funzioni non-negative $g + f_n$, $g - f_n$.
Per il lemma di Fatou, poiché $g + f_n \to g + f$ e $g - f_n \to g - f$,

$$\int_D (g+f)\, dx \leq \min\lim_{n\to\infty} \int_D (g + f_n)\, dx , \quad \int_D (g - f)\, dx \leq \min\lim_{n\to\infty} \int_D (g - f_n)\, dx .$$

Poiché $\operatorname{minlim}_{n\to\infty} \int_D (g+f_n)\,dx = \int_D g\,dx + \operatorname{minlim}_{n\to\infty} \int_D f_n\,dx$, e (5)

$\operatorname{minlim}_{n\to\infty} \int_D (g-f_n)\,dx = \int_D g\,dx + \operatorname{minlim}_{n\to\infty}\left[-\int_D f_n\,dx\right] = \int_D g\,dx - \operatorname{maxlim}_{n\to\infty} \int_D f_n\,dx$,

semplificando il numero finito $\int_D g\,dx$ si ottiene

$$\operatorname{maxlim}_{n\to\infty} \int_D f_n\,dx \le \int_D f\,dx \le \operatorname{minlim}_{n\to\infty} \int_D f_n\,dx,$$

e quindi

$$\exists \lim_{n\to\infty} \int_D f_n\,dx = \int_D f\,dx.$$

Infine, essendo

$$|f_n - f| \to 0 \text{ q.o. in } D, \quad |f_n - f| \le 2g \text{ q.o. in } D,$$

la parte appena provata ci dice che

$$\exists \lim_{n\to\infty} \int_D |f_n - f|\,dx = 0. \quad \square$$

<u>Esempi ed esercizi</u>

- Se $f_n \geqslant 0$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} \int_D f_n\,dx = \int_D \sum_{n=0}^{\infty} f_n\,dx$.
- Se $\sum_{n=0}^{\infty} \int_D |f_n|\,dx < \infty$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} \int_D f_n\,dx = \int_D \sum_{n=0}^{\infty} f_n\,dx$.
- Se f è sommabile in D, allora $\lim_{n\to\infty} \int_D |f|^{1/n}\,dx = m_N\{f \neq 0\}$.
- $\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{p+nq} \quad \forall p,q > 0$.

  Analizzare il risultato nei casi $p=q=1$, $\frac{p}{2}=q=1$, $\frac{p}{3}=q=1$.
- $\int_0^1 \frac{x^p}{1-x} |\ln x|\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+p)^2} \quad \forall p > -1$.
- $\int_0^1 \frac{(x \ln x)^2}{1+x^2}\,dx = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^3}$.

(6)

• Assoluta continuità dell'integrale: se f è sommabile in D, allora per ogni $\varepsilon>0$ esiste $\delta>0$ tale che

$$E\in \mathcal{M}_N,\ E\subseteq D,\ m_N(E)<\delta \implies \int_E |f|\,dx<\varepsilon$$

[per assurdo: supponiamo che $\exists\, \varepsilon_0>0$, $\exists \{E_n\}\subseteq \mathcal{M}_N$, $E_n\subseteq D$, con $m_N(E_n)<2^{-n}$ e $\int_{E_n}|f|\,dx\geq \varepsilon_0$. Posto $F_n=\bigcup_{k=n}^{\infty}E_k$, $F=\bigcap_n F_n$, si ha $m_N(F_n)\leq \sum_{k=n}^{\infty}2^{-k}=2^{-n+1}\to 0$, quindi $m_N(F)=0$. Ma, per convergenza dominata,

$$0=\int_F |f|\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_{F_n}|f|\,dx\geq \max\lim_{n\to\infty}\int_{E_n}|f|\,dx\geq\varepsilon_0,$$

assurdo.]

• Integrali dipendenti da parametro.

(A) $D\in\mathcal{M}_N$, $t_0\in\mathbb{R}$, $f: D\times\mathbb{R}\to\overline{\mathbb{R}}$ tale che:

(i) $\exists \lim_{t\to t_0} f(x,t)=g(x)$ per q.o. $x\in D$, (ii) $x\mapsto f(t,x)$ misurabile in D per ogni $t\in\mathbb{R}$, (iii) $\exists\, h$ sommabile su D, tale che $|f(x,t)|\leq h(x)$ per q.o. $x\in D$, $\forall t\in\mathbb{R}$; allora $\exists \lim_{t\to t_0}\int_D f(x,t)\,dx=\int_D g(x)\,dx$.

(B) $D\in\mathcal{M}_N$, $f: D\times\mathbb{R}\to\overline{\mathbb{R}}$ tale che:

(i) $\exists \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ per q.o. $x\in D$, $\forall t\in\mathbb{R}$, (ii) $x\mapsto f(x,t)$ è sommabile in D $\forall t\in\mathbb{R}$, (iii) $\exists\, h$ sommabile in D, tale che $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right|\leq h(x)$ per q.o. $x\in D$, $\forall t\in\mathbb{R}$. Allora $\exists \frac{d}{dt}\int_D f(x,t)\,dx=\int_D\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx$.

Esempio: $\frac{d}{d\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda t}u(t)\,dt=-\int_0^\infty t\,e^{-\lambda t}u(t)\,dt$ per $\lambda>0$ e u funzione misurabile e limitata. [$\hat{u}(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}u(t)\,dt$ è la trasformata di Laplace di u]