ANALISI 2 | Lu 30/3/15 | (1)

CALCOLO DEGLI INTEGRALI MULTIPLI

Come vedremo, gli integrali di funzioni sommabili su insiemi misurabili di $\mathbb{R}^N$ possono ridursi, sotto opportune ipotesi, al calcolo di N integrali semplici iterati.

Anzitutto, verifichiamo che le regole di calcolo per gli integrali semplici, quando occorre integrare funzioni "non troppo brutte", non cambiano passando all'integrale secondo Lebesgue.

Proposizione Sia f una funzione limitata in $[a,b]$, integrabile secondo Riemann in $[a,b]$. Allora f è sommabile in $[a,b]$ (secondo Lebesgue) e gli integrali di f secondo Riemann e secondo Lebesgue coincidono.

dim. Indichiamo rispettivamente con $\int_a^b f\,dx$ e con $\int_{[a,b]} f\,dx$ gli integrali di f secondo Riemann e secondo Lebesgue. Supponiamo dapprima $f \geq 0$. Siccome f è integrabile secondo Riemann, si ha

$$\int_a^b f\,dx = \sup_\sigma s(f,\sigma) = \inf_\sigma S(f,\sigma),$$

ove $\sigma = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b\}$ è una suddivisione di $[a,b]$, e

$$s(f,\sigma) = \sum_{i=1}^k \inf_{[x_{i-1},x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1}), \quad S(f,\sigma) = \sum_{i=1}^k \sup_{[x_{i-1},x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Osserviamo che, posto $\varphi_\sigma(x) = \sum_{i=1}^k \inf_{[x_{i-1},x_i]} f \cdot I_{[x_{i-1},x_i]}$, $\psi_\sigma(x) = \sum_{i=1}^k \sup_{[x_{i-1},x_i]} f \cdot I_{[x_{i-1},x_i]}$, si ha $s(f,\sigma) = \int_{[a,b]} \varphi_\sigma\,dx$, $S(f,\sigma) = \int_{[a,b]} \psi_\sigma\,dx$, con $\varphi_\sigma, \psi_\sigma \in S_0$

Proviamo che f è misurabile secondo Lebesgue. Detta σ_n la suddivisione equispaziata $\sigma_n = \{a < a + \frac{b-a}{2^n} < a + \frac{2}{2^n}(b-a) < \dots < a + \frac{n-1}{2^n}(b-a) < b\}$, e posto $\varphi_n = \max\{\varphi_{\sigma_1}, \dots, \varphi_{\sigma_n}\}$, $\psi_n = \min\{\psi_{\sigma_1}, \dots, \psi_{\sigma_n}\}$, si ha $\varphi_n \in S_0$, $\psi_n \in S_0$, $\varphi_n \leq \varphi_{n+1} \leq f \leq \psi_{n+1} \leq \psi_n$, ed inoltre dalla teoria dell'integrale di Riemann si sa che $\lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} \varphi_n\,dx = \int_a^b f\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} \psi_n\,dx$. In particolare, quindi,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} (\psi_n - \varphi_n)\, dx = 0.$$

Per monotonia,

$$\exists \lim_{n\to\infty} [\psi_n(x) - \varphi_n(x)] \geq 0 \quad \forall x \in [a,b],$$

e per il lemma di Fatou

$$0 \leq \int_{[a,b]} \lim_{n\to\infty} [\psi_n - \varphi_n]\, dx \leq \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} [\psi_n - \varphi_n]\, dx = 0.$$

Dunque,

$$\lim_{n\to\infty} [\psi_n(x) - \varphi_n(x)] = 0 \quad \text{q.o. in } [a,b],$$

e a maggior ragione

$$\lim_{n\to\infty} [\psi_n(x) - f(x)] = 0 \quad \text{q.o. in } [a,b],$$

il che prova che f è misurabile.

Poiché f è misurabile e limitata in $[a,b]$, essa è sommabile in $[a,b]$:

$$\int_a^b |f|\, dx \leq \sup_{[a,b]} |f|\, (b-a).$$

Inoltre

$$\int_a^b f\, dx = \sup_\sigma \int_{[a,b]} \varphi_\sigma\, dx \leq \sup \left\{ \int_{[a,b]} \varphi\, dx : 0 \leq \varphi \leq f I_{[a,b]}, \varphi \in S_0 \right\} = \int_{[a,b]} f\, dx,$$

e per monotonia

$$\int_{[a,b]} f\, dx \leq \int_{[a,b]} \psi_\sigma\, dx \quad \forall \sigma \text{ suddivisione di } [a,b].$$

Quindi

$$\int_{[a,b]} f\, dx \leq \inf_\sigma S(f,\sigma) = \int_a^b f\, dx.$$

Ne segue che i due integrali sono uguali.

Se f cambia segno, si applica quanto detto a f^+ e f^-, e poi si sottrae, il che è lecito essendo f sommabile □

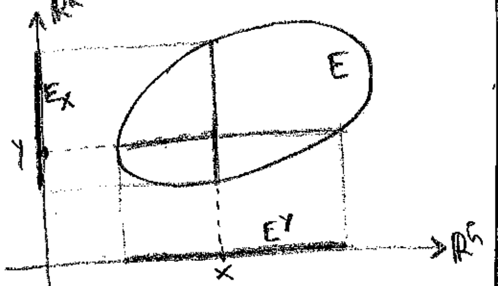
Vediamo adesso come si riesca a "decomporre" un insieme $E \in \mathcal{M}_N$ in "sezioni" ortogonali di dimensioni h e k (con $h+k=N$), esprimendo la misura $m_N(E)$ in termini di opportuni integrali rispetto a m_h e m_k.

Premettiamo una definizione.

<u>Definizione</u> Sia $E \in \mathcal{M}_N$. Per ogni $x \in \mathbb{R}^h$ e per ogni $y \in \mathbb{R}^k$ consideriamo le <u>sezioni</u> E_x ed E^y, così definite:

$E_x = \{y \in \mathbb{R}^k : (x,y) \in E\} \quad \forall x \in \mathbb{R}^h,$

$E^y = \{x \in \mathbb{R}^h : (x,y) \in E\} \quad \forall y \in \mathbb{R}^k.$



Si noti che E_x ed E_y possono essere vuoti per certi x e certi y.

Si noti anche che dalla definizione segue subito che

$(E \cup F)_x = E_x \cup F_x, \quad (E \cap F)_x = E_x \cap F_x, \quad (E \setminus F)_x = E_x \setminus F_x$

e similmente per E^y e F^y.

<u>Proposizione</u> Se $E \in \mathcal{M}_N$, allora:

(i) $E_x \in \mathcal{M}_k$ per q.o. $x \in \mathbb{R}^h$, $E^y \in \mathcal{M}_h$ per q.o. $y \in \mathbb{R}^k$;

(ii) $x \longmapsto m_k(E_x)$ è misurabile in $\mathbb{R}^h$, $y \longmapsto m_h(E^y)$ è misurabile in $\mathbb{R}^k$,

(iii) risulta

$$m_N(E) = \int_{\mathbb{R}^h} m_k(E_x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^k} m_h(E^y)\,dy.$$

Quindi la misura di E si ottiene integrando "per fette" verticali od orizzontali.

dim. $\underline{1°}$ Se $E \in \mathcal{P}_N$, allora $E = P \times Q$, con $P \in \mathcal{P}_h$, $Q \in \mathcal{P}_k$. (4)

Ne segue

$$E_x = \begin{cases} Q & \text{se } x \in P \\ \phi & \text{se } x \notin P \end{cases}, \quad \text{quindi } E_x \in \mathcal{M}_k \ \forall x \in \mathbb{R}^h,$$

$$E^y = \begin{cases} P & \text{se } y \in Q \\ \phi & \text{se } y \notin Q \end{cases}, \quad \text{quindi } E^y \in \mathcal{M}_h \ \forall y \in \mathbb{R}^k,$$

ed anche

$$m_k(E_x) = m_k(Q)\, I_P(x), \qquad m_h(E^y) = m_h(P)\, I_Q(y),$$

quindi queste funzioni sono misurabili, e infine

$$m_N(E) = m_h(P)\, m_k(Q) = \int_{\mathbb{R}^h} m_k(E_x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^k} m_h(E^y)\,dy.$$

$\underline{2°}$ Se $E \subseteq \mathbb{R}^N$ è aperto, si ha $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, con G_n unione finita di elementi disgiunti di $\mathcal{P}_N$ (ottenuti, per ciascun n, con un numero finito di tagli paralleli agli assi); sarà allora

$$G_n = \bigcup_{i=1}^{p_n} P_{in}, \quad P_{in} \in \mathcal{P}_N,$$

con i P_{in} tra loro disgiunti. Allora

$$(G_n)_x = \bigcup_{i=1}^{p_n} (P_{in})_x, \quad (G_n)^y = \bigcup_{i=1}^{p_n} (P_{in})^y,$$

con i $(P_{in})_x \in \mathcal{P}_k$ fra loro disgiunti, ed i $(P_{in})^y \in \mathcal{P}_h$ fra loro disgiunti.

Allora $(G_n)_x \in \mathcal{M}_k$ per ogni $x \in \mathbb{R}^h$, $(G_n)^y \in \mathcal{M}_h$ per ogni $y \in \mathbb{R}^k$, e le funzioni

$$m_k((G_n)_x) = \sum_{i=1}^{p_n} m_k((P_{in})_x), \quad m_h((G_n)^y) = \sum_{i=1}^{p_n} m_h((P_{in})^y)$$

sono misurabili, e per additività

$$m_N(G_n) = \sum_{i=1}^{p_n} m_N(P_{in}) = \sum_{i=1}^{p_n} \int_{\mathbb{R}^h} m_k((P_{in})_x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^h} m_k((G_n)_x)\,dx,$$

$$m_N(G_n) = \sum_{i=1}^{p_n} m_N(P_{in}) = \sum_{i=1}^{p_n} \int_{\mathbb{R}^k} m_h((P_{in})^y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^k} m_h((G_n)^y)\,dy.$$

$\underline{3^\circ}$ Se $E \subseteq \mathbb{R}^N$ è chiuso, allora $E_x = \mathbb{R}^k \setminus (E^c)_x$, $E^y = \mathbb{R}^h \setminus (E^c)^y$ (5)

sono misurabili. Poi, scelti Q_n cubi aperti di $\mathbb{R}^N$ con $Q_n \subset Q_{n+1}$ e $\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n = \mathbb{R}^N$, si ha

$$m_N(E\cap Q_n) = m_N(Q_n) - m_N(E^c \cap Q_n) = \text{(passo 2)}$$
$$= \int_{\mathbb{R}^k} m_h((Q_n)^y)\,dy - \int_{\mathbb{R}^k} m_h((E^c\cap Q_n)^y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^k} m_h((E\cap Q_n)^y)\,dy$$

e per $n\to\infty$

$$m_N(E) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^k} m_h((E\cap Q_n)^y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^k} m_h(E^y)\,dy.$$

In modo analogo si ottiene

$$m_N(E) = \int_{\mathbb{R}^h} m_k(E_x)\,dx.$$

$\underline{4^\circ}$ Infine sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ misurabile. Per ogni $n\in\mathbb{N}$ esistono A_n aperto e C_n chiuso, tali che $A_n \supseteq A_{n+1} \supseteq E \supseteq C_{n+1} \supseteq C_n$, e $m_N(A_n\setminus C_n) < \frac{1}{n}$. Per il passo 2,

$$m_N(A_n\setminus C_n) = \int_{\mathbb{R}^h} m_k((A_n\setminus C_n)_x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^k} m_h((A_n\setminus C_n)^y)\,dy < \frac{1}{n},$$

quindi

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^h} m_k((A_n\setminus C_n)_x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^k} m_h((A_n\setminus C_n)^y)\,dy = 0.$$

Gli integrandi sono non negativi e decrescenti: quindi, per il lemma di Fatou,

$$\int_{\mathbb{R}^h} \lim_{n\to\infty} m_k((A_n\setminus C_n)_x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^k} \lim_{n\to\infty} m_h((A_n\setminus C_n)^y)\,dy = 0,$$

e a maggior ragione

$$\int_{\mathbb{R}^h} \lim_{n\to\infty} m_k^*((E\setminus C_n)_x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^k} \lim_{n\to\infty} m_h^*((E\setminus C_n)^y)\,dy = 0.$$

Pertanto

$$\lim_{n\to\infty} m_k^*(E_x\setminus (C_n)_x) = 0 \text{ q.o. in } \mathbb{R}^h, \quad \lim_{n\to\infty} m_h^*(E^y\setminus (C_n)^y) = 0 \text{ q.o. in } \mathbb{R}^k,$$

dunque $E_x \in \mathcal{M}_k$ per q.o. $x\in\mathbb{R}^h$, $E^y \in \mathcal{M}_h$ per q.o. $y \in \mathbb{R}^k$. Inoltre, essendo $m_N(E) = m_N(C_n) + m_N(E \setminus C_n)$, e analogamente per $m_h(E^y)$ e $m_k(E_x)$, si ha

$$\lim_{n\to\infty} m_N(C_n) = m_N(E), \quad \lim_{n\to\infty} m_k((C_n)_x) = m_k(E_x) \text{ per q.o. } x \in \mathbb{R}^h,$$

$$\lim_{n\to\infty} m_h((C_n)^y) = m_h(E^y) \text{ per q.o. } y \in \mathbb{R}^k,$$

cosicché le funzioni $x \mapsto m_k(E_x)$ e $y \mapsto m_h(E^y)$ sono misurabili. Inoltre, per il teorema di B. Levi, e il passo 3,

$$m_N(E) = \lim_{n\to\infty} m_N(C_n) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^h} m_k((C_n)_x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^h} m_k(E_x)\,dx,$$

e analogamente

$$m_N(E) = \int_{\mathbb{R}^k} m_h(E^y)\,dy. \quad \square$$

<u>Osservazione</u>: Il risultato della proposizione precedente si può scrivere in modo più comodo e suscettibile di generalizzazioni: per ogni insieme misurabile di $\mathbb{R}^N$ si ha:

$$\int_{\mathbb{R}^N} I_E(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^h}\left[\int_{\mathbb{R}^k} I_E(x,y)\,dy\right]dx = \int_{\mathbb{R}^k}\left[\int_{\mathbb{R}^h} I_E(x,y)\,dx\right]dy.$$

Infatti basta osservare che

$$I_E(x,y) = I_{E_x}(y) = I_{E^y}(x) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^N$$

e che, per definizione,

$$\int_{\mathbb{R}^k} I_E(x,y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^k} I_{E_x}(y)\,dy = m_k(E_x)$$

$$\int_{\mathbb{R}^h} I_E(x,y)\,dx = \int_{\mathbb{R}^h} I_{E^y}(x)\,dx = m_h(E^y)$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} I_E(x,y)\,dx\,dy = m_N(E).$$

Osservazione Come conseguenza della proposizione precedente, è facile dimostrare che se $E \in \mathcal{M}_h$ e $F \in \mathcal{M}_k$ allora $E \times F \in \mathcal{M}_N$ (e in tal caso $m_N(E\times F) = m_h(E)\, m_k(F)$). Infatti, la proprietà è vera se E, F sono entrambi aperti, cosicché $E\times F$ è aperto, oppure entrambi chiusi (cosicché $E \times F$ è chiuso). Se E, F sono misurabili, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esistono $A_n \subseteq \mathbb{R}^h$, $B_n \subseteq \mathbb{R}^k$ aperti, e $C_n \subseteq \mathbb{R}^h$, $D_n \subseteq \mathbb{R}^k$ chiusi, tali che

$$A_n \supseteq E \supseteq C_n, \qquad B_n \supseteq F \supseteq D_n,$$

$$m_h(A_n \setminus E) < \frac{1}{n}, \; m_h(E \setminus C_n) < \frac{1}{n}, \; m_k(B_n \setminus F) < \frac{1}{n}, \; m_k(F \setminus D_n) < \frac{1}{n}.$$

Supponiamo dapprima $m_h(E) < \infty$ e $m_k(F) < \infty$; allora anche $m_h(A_n)$ e $m_k(B_n)$ sono finite. Inoltre

$$A_n \times B_n \supseteq E \times F \supseteq C_n \times D_n,$$

e

$$m_N((A_n\times B_n)\setminus(C_n\times D_n)) \le m_N((A_n\setminus C_n)\times B_n) + m_N(C_n \times (B_n \setminus D_n)),$$

da cui, usando la proposizione precedente,

$$m_N((A_n\times B_n)\setminus(C_n\times D_n)) \le m_h(A_n\setminus C_n)\, m_k(B_n) + m_h(C_n)\, m_k(B_n\setminus D_n)$$
$$\le \frac{1}{n}\left[m_k(F) + \frac{1}{n}\right] + \frac{1}{n}\left[m_h(E) + \frac{1}{n}\right].$$

Ne segue, a maggior ragione,

$$m_N((A_n \times B_n)\setminus E\times F) \to 0 \quad \text{per } n\to\infty.$$

Quindi $E\times F$ è misurabile.

Se invece, ad esempio, $m_h(E) = \infty$, si può scrivere

$$E\times F = \bigcup_n ((E\cap Q_n)\times F)$$

ove $\{Q_n\} \subseteq \mathcal{P}_h$, $Q_n \subset Q_{n+1}$ e $\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n = \mathbb{R}^h$. Dunque $E \times F$ è unione numerabile di misurabili e quindi è misurabile.

A questo punto è facile dimostrare il seguente teorema generale:

<u>Teorema (di Fubini - Tonelli)</u> Sia $f: \mathbb{R}^N = \mathbb{R}^h \times \mathbb{R}^k \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione integrabile.
Allora:
(i) la funzione $x \mapsto f(x,y)$ è integrabile su $\mathbb{R}^h$ per q.o. $y \in \mathbb{R}^k$, e la funzione $y \mapsto f(x,y)$ è integrabile su $\mathbb{R}^k$ per q.o. $x \in \mathbb{R}^h$;
(ii) la funzione $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^h} f(x,y)dx$ è integrabile in $\mathbb{R}^k$ e la funzione $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^k} f(x,y)dy$ è integrabile in $\mathbb{R}^h$,
(iii) risulta $\int_{\mathbb{R}^N} f(x,y)\,dxdy = \int_{\mathbb{R}^k}\left[\int_{\mathbb{R}^h} f(x,y)dx\right]dy = \int_{\mathbb{R}^h}\left[\int_{\mathbb{R}^k} f(x,y)dy\right]dx.$

<u>dim</u>. Grazie all' osservazione precedente, il risultato è vero per le funzioni indicatrici di insiemi misurabili.
Per linearità, il risultato si estende alle funzioni semplici di S_0.
Per le f non negative, il risultato segue dal teorema di B. Levi, utilizzando una successione $\{\varphi_n\} \subseteq S_0$ tale che $0 \le \varphi_n \le \varphi_{n+1}$ e $\varphi_n(x,y) \to f(x,y)$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^N$. Infine per le f integrabili basta sottrarre le uguaglianze valide per f^+ e per f^-. □

<u>Esempio</u>. Vogliamo calcolare $\int_D f\,dxdy$, ove

$$D = \{(x,y):\ a \le x \le b,\quad \alpha(x) \le y \le \beta(x)\},$$

essendo $\alpha, \beta \in C^0[a,b]$ con $\alpha \le \beta$ ed essendo f una funzione integrabile su D; D è misurabile perché è chiuso. Come sappiamo,

$$\int_D f\,dxdy = \int_{\mathbb{R}^2} f\, I_D\, dxdy.$$

Utilizzando il Teorema di Fubini-Tonelli,

$$\int_{\mathbb{R}^2} f\, I_D \, dx\, dy = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, I_D(x,y)\, dy \right] dx =$$

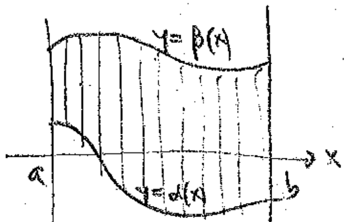
(essendo l'integrando nullo per ogni y, quando $x \notin [a,b]$)

$$= \int_a^b \left[\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, I_D(x,y)\, dy \right] dx =$$

(essendo l'integrando nullo per $y \notin [\alpha(x), \beta(x)]$)

$$= \int_a^b \left[\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\, I_D(x,y)\, dy \right] dx = \quad (\text{essendo } I_D = 1)$$

$$= \int_a^b \left[\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\, dy \right] dx .$$

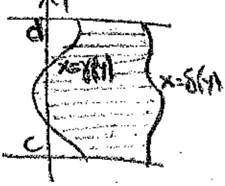


L'insieme D si dice "normale rispetto all'asse x" (essendo costituito da segmenti perpendicolari all'asse x).
Invece l'insieme

$$E = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c,d],\ \gamma(y) \le x \le \delta(y) \},$$

con $\gamma, \delta \in C^0[c,d]$ e $\gamma \le \delta$, si dice "normale rispetto all'asse y".
e se g è integrabile su E si ha

$$\int_E g(x,y)\, dx\, dy = \int_{\mathbb{R}^2} g\, I_E \, dx\, dy = \int_c^d \left[\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} g(x,y)\, dx \right] dy .$$



Esempi.

1. $\int_T e^{(1-y)^2} dxdy$, T = triangolo di vertici $(0,0), (1,0), (1,1)$.

2. $\int_D y^2 dxdy$, D = insieme delimitato da $x=1$ e $x=y^2$.

3. $m_3(E)$, $E = \{(x,y,z): x>0, y>0, z>0, x+y+z<1\}$.

4. $m_3(E)$, E delimitato da $x=0, x=1, y=-1, y=1, z=0, z=x^2+y^2$.

5. $\int_E \sqrt{x+y}\, dxdy$, E = triangolo di vertici $(0,0), (1,1), (2,1)$.

In $\mathbb{R}^3$, un insieme del tipo seguente:

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D, \alpha(x,y) \le z \le \beta(x,y)\}$$

ove $D \subseteq \mathbb{R}^2$ è un chiuso, $\alpha, \beta \in C^0(D)$, $\alpha \le \beta$, si dice "insieme normale rispetto al piano xy". Se f è integrabile su E, si ha

$$\int_E f(x,y,z)\, dxdydz = \int_D \left[\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\, dz\right] dxdy,$$

e se poi $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a<x<b, p(x) \le y \le q(x)\}$ con $p, q \in C^0[a,b]$ e $p \le q$, allora

$$\int_E f(x,y,z)\, dxdydz = \int_a^b \left[\int_{p(x)}^{q(x)} \left[\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\, dz\right] dy\right] dx.$$

Si osservi che se definiamo le sezioni E_x come al solito, ossia

$$E_x = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \in E\} =$$
$$= \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : p(x) \le y \le q(x), \alpha(x,y) \le z \le \beta(x,y)\}$$

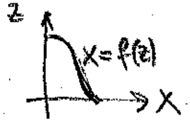
allora

$$\int_E f(x,y,z)\, dxdydz = \int_a^b \left[\int_{E_x} f(x,y,z)\, dydz\right] dx$$

e questa è una integrazione per fette perpendicolari all'asse x.

Questo metodo è utile nel caso di solidi di rotazione:

posto $G=\{(x,z)\in\mathbb{R}^2 : a\le z\le b,\ 0\le x\le f(z)\}$, ove $f\in C^0[a,b]$, $f\ge 0$,



il ruotato di G attorno all'asse z è

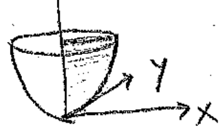
$$H=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : a\le z\le b,\ \sqrt{x^2+y^2}\le f(z)\}.$$

Allora integrando per fette orizzontali $H_z=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2}\le f(z)\}$, che sono dischi di raggio $f(z)$, si ha

$$m_3(H)=\int_a^b m_2(H_z)\,dz=\int_a^b \pi f(z)^2\,dz.$$

Esempio: Sia $f(z)=\sqrt{z}$, $z\in[0,1]$, cosicché

$$H=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\le z\le 1\}.$$



Allora

$$m_3(H)=\int_0^1 \pi z\,dz=\frac{\pi}{2}.$$

Esempio Calcoliamo il valore dell'integrale di Riemann improprio

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx := \lim_{a\to\infty}\int_0^a \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Si ha per ogni $a>0$

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x}\,dx=\int_0^a\left[\int_0^\infty e^{-xy}\sin x\,dy\right]dx.$$

Essendo $(x,y)\to e^{-xy}\sin x$ sommabile in $[0,a]\times[0,\infty[$, poiché

$$\int_0^a\int_0^\infty e^{-xy}|\sin x|\,dy\,dx=\int_0^a\frac{|\sin x|}{x}\,dx<\infty,$$

otteniamo per il teorema di Fubini-Tonelli

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^\infty \left[\int_0^a e^{-xy} \sin x \, dx\right] dy = \text{(integrando per parti)}$$

$$= \int_0^\infty \left[\frac{1}{1+y^2}\left(1-e^{-ay}\left(y \sin a + \cos a\right)\right)\right] dy,$$

e per convergenza dominata

$$\lim_{a\to\infty} \int_0^a \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^\infty \frac{1}{1+y^2}\,dy = \frac{\pi}{2}.$$