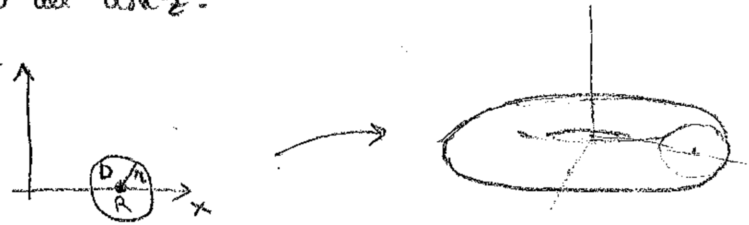
Ulteriori esercizi sull' integrazione

1. Volume del toro T: fissati $R > r > 0$, si considera la "ciambella piena" ottenuta ruotando il disco D di raggio r centrato in $(R,0,0)$ attorno all' asse z.



$$D = \{(x,z):\ z \in [-r,r],\ R-\sqrt{r^2-z^2} \le x \le R+\sqrt{r^2-z^2}\}$$

$$m_3(T) = \int_{-r}^{r} m_2(T_z)\,dz, \qquad T_z = \{(x,y):\ R-\sqrt{r^2-z^2} \le \sqrt{x^2+y^2} \le R+\sqrt{r^2-z^2}\}$$

$$m_2(T_z) = \pi\left[\left(R+\sqrt{r^2-z^2}\right)^2 - \left(R-\sqrt{r^2-z^2}\right)^2\right] = 4\pi R\sqrt{r^2-z^2}.$$

Quindi

$$m_3(T) = \int_{-r}^{r} 4\pi R\sqrt{r^2-z^2}\,dz = 8\pi R\int_0^r \sqrt{r^2-z^2}\,dz.$$

Dato che

$$\int_0^r \sqrt{r^2-z^2}\,dz = \cancel{\left[z\sqrt{r^2-z^2}\right]_0^r} + \int_0^r \frac{z^2-r^2+r^2}{\sqrt{r^2-z^2}}\,dz =$$

$$= -\int_0^r \sqrt{r^2-z^2}\,dz + r\int_0^r \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{z}{r}\right)^2}}\,dz\,;$$

si ha

$$\int_0^r \sqrt{r^2-z^2}\,dz = \frac{r}{2}\int_0^r \frac{dz}{\sqrt{1-\left(\frac{z}{r}\right)^2}} = \frac{r^2}{2}\left[\arcsin\frac{z}{r}\right]_0^r = \frac{\pi r^2}{4},$$

e pertanto

$$m_3(T) = 2\pi^2 R r^2 = (2\pi R)\pi r^2,$$

ossia $m_3(T)$ è il prodotto dell' area di D, moltiplicata per la lunghezza della circonferenza descritta dal centro di D.

2. Il baricentro di un insieme $E\subset\mathbb{R}^N$ (misurabile, con $m_N(E)<\infty$) è il punto

$$\bar{x}=(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_N) \quad \text{ove} \quad \bar{x}_i=\frac{1}{m_N(E)}\int_E x_i\,dx\,,\ 1\le i\le N.$$

Calcolare il baricentro di

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\in[0,\pi],\ 0\le y\le \sin x\},$$

$$B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\le 1,\ (x-1)^2+y^2\le 1\},$$

$$C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\ge 1,\ (x-1)^2+y^2\le 1\}.$$

Per esempio:

$$\bar{x}_C=\left(\frac{1}{m_2(C)}\int_C x\,dx\,dy,\ 0\right)$$

$$m_2(C)=m_2\left(\{(x-1)^2+y^2\le 1\}\right)-m_2(B)=\pi-m_2(B)$$

$$m_2(B)=\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}dx\right)dy=2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(2\sqrt{1-y^2}-1\right)dy=\dots$$

$$\int_C x\,dx\,dy=\int_{\{(x-1)^2+y^2\le 1\}}x\,dx\,dy-\int_B x\,dx\,dy=\dots$$

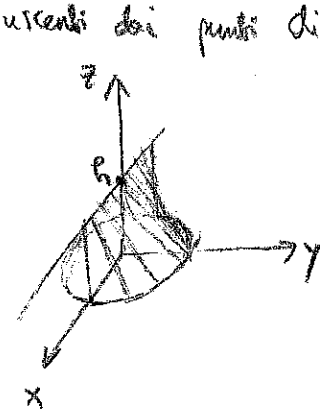
3. Il momento d'inerzia di un insieme $E\subseteq\mathbb{R}^N$ (misurabile, con $m_N(E)<\infty$) rispetto a un punto, a una retta, a un piano, ecc è

$$I=\int_E d(x)^2\,dx \qquad \text{ove } d(x)=\operatorname{dist}(x,\Pi)$$

e Π è il punto, la retta, il piano, ecc.

Calcolare il momento d'inerzia degli insiemi A, B, C rispetto agli assi x, y e rispetto all'origine.

4. Il "cono a cuneo" è il solido E, delimitato dal disco $\{x^2+y^2 \le 1,\ z=0\}$ e dalle rette perpendicolari a $\{x=0, z=h\}$ uscenti dai punti di $\{x^2+y^2=1\}$. Calcoliamo il volume di E.



Fissato x, l'insieme E è delimitato superiormente da

$$z = h\left(1-\frac{|y|}{\sqrt{1-x^2}}\right), \quad 0 \le |y| \le \sqrt{1-x^2}$$

Quindi

$$E = \left\{(x,y,z) :\ x^2+y^2 \le 1,\ 0 \le z \le h\left(1-\frac{|y|}{\sqrt{1-x^2}}\right)\right\}$$

e $$m_3(E) = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} h\left(1-\frac{|y|}{\sqrt{1-x^2}}\right) dy\, dx =$$

$$= 4\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} h\left(1-\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}\right) dy\, dx = \text{-----}$$

5. Se $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ è misurabile e $D \in \mathcal{M}_N$, allora

$$\int_D |f|\, dx = \int_0^\infty m_N\{x \in D :\ |f(x)| > t\}\, dt.$$

Infatti $$\int_D |f| dx = m_{N+1}\left\{(x,t) \in \mathbb{R}^{N+1} :\ x \in D,\ 0 < t < |f(x)|\right\} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N}\int_0^\infty I_{\{(x,t):\ x\in D,\ 0<t<|f(x)|\}}(x,t)\, dt\, dx =$$

$$= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} I_{\{x\in D:\ |f(x)|>t\}}(x)\, dx\, dt =$$

$$= \int_0^\infty m_N\{x \in D : |f(x)| > t\}\, dt.$$

5. Calcolare $\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx$ $(a,b>0)$.

L'integrale è finito (l'integrando $\to 0$ per $x\to 0$).

Si ha

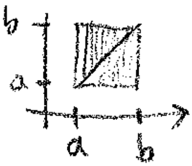
$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx = \int_0^\infty \frac{1}{x}\int_b^a \frac{d}{dt}\, e^{-tx}\,dt\,dx =$$

$$= -\int_0^\infty \frac{1}{x}\int_b^a x e^{-tx}\,dt\,dx = -\int_0^\infty\int_b^a e^{-tx}\,dt\,dx =$$

$$= -\int_b^a\int_0^\infty e^{-tx}\,dx\,dt = -\int_b^a \frac{1}{t}\,dt = -\ln\frac{a}{b} = \ln\frac{b}{a}$$

6. $\int_E \max\{x,y\}\,dx\,dy$, $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy>0,\ a<\max\{x,y\}<b\}$,

ove $b>a>0$.



Si ha

$$\int_E \max\{x,y\}\,dx\,dy = \int_a^b\int_a^x x\,dy\,dx + \int_a^b\int_a^y y\,dx\,dy =$$

$$= 2\int_a^b\int_a^x x\,dy\,dx = 2\int_a^b x(x-a)\,dx =$$

$$= \frac{2}{3}(b^3-a^3) - b^2 a + a^3 = \frac{2}{3}b^3 + \frac{a^3}{3} - ab^2.$$