ANALISI 2 | Lu 13/4/15

CAMBIAMENTO DI VARIABILI

Per integrali in una sola variabile, come si sa, se $\varphi:[a,b]\to[c,d]$ è bigettiva e di classe C^1, e f è una funzione integrabile su $[c,d]$, vale la formula

$$\int_c^d f(x)\,dx = \begin{cases} \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt & \text{se } \varphi(c)=a,\ \varphi(d)=b, \\ \int_b^a f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt & \text{se } \varphi(c)=b,\ \varphi(d)=a, \end{cases}$$

e dunque, in ogni caso,

$$\int_c^d f(x)\,dx = \int_a^b f(\varphi(t))\,|\varphi'(t)|\,dt .$$

Questa formula si generalizza al caso di N variabili nel modo seguente: siano A, B aperti di $\mathbb{R}^N$ e sia $g: A\to B$ invertibile con g, g^{-1} di classe C^1, e con

$$J_g(x) \neq 0 \quad \forall x\in A,$$

ove $J_g(x) = \det Dg(x)$.

Teorema 1 Se $E\subseteq A$, $E\in \mathcal{M}_N$, allora $g(E)\in\mathcal{M}_N$ e

$$m_N(g(E)) = \int_E |J_g(x)|\,dx .$$

Teorema 2 Se $F\subseteq B$, $F\in\mathcal{M}_N$, e f è integrabile su F, allora

$$\int_F f(y)\,dy = \int_{g^{-1}(F)} f(g(x))\,|J_g(x)|\,dx .$$

dim. Teorema 2. Il teorema 1, applicato a g^{-1}, dice che se $F\subseteq B$, $F\in\mathcal{M}_N$, allora $g^{-1}(F)\in\mathcal{M}_N$ e, posto $E=g^{-1}(F)$, ed estesa $J_g(x)$ a 0 fuori di A,

$$\int_{\mathbb{R}^N} I_F\,dy = m_N(F) = \int_E |J_g(x)|\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} I_F(g(x))\,|J_g(x)|\,dx .$$

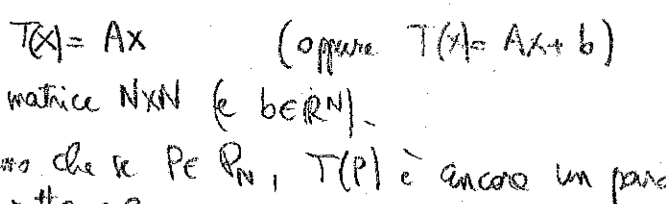
Questa formula, per linearità, si estende a tutte le $\varphi\in S_0$. Poi, utilizzando il teorema di B. Levi, otteniamo la formula per tutte le f misurabili su F e non negative, e infine, per differenza, la formula è vera per ogni f integrabile su F. □

<u>dim Teorema 1</u>. Questa dimostrazione è alquanto laboriosa. Si deve dapprima considerare il caso di una $T: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ lineare (o affine),

$$T(x) = Ax \qquad (\text{oppure } T(x) = Ax + b)$$

con A matrice $N \times N$ (e $b \in \mathbb{R}^N$).

Osserviamo che se $P \in \mathcal{P}_N$, $T(P)$ è ancora un parallelepipedo ma non più rettangolo



Dobbiamo quindi introdurre la classe $\mathcal{P}_N'$ dei parallelepipedi non necessariamente rettangoli: quindi $\mathcal{P}_N \subset \mathcal{P}_N'$.

Un elemento $P \in \mathcal{P}_N'$ si scrive così:

$$P = \left\{ x = x_0 + \sum_{i=1}^{N} t_i u_i \, : \, 0 \le t_i \le 1 \text{ per } i=1..N \right\} =: x_0 + P(u_1, ..., u_N).$$

È chiaro che $\mathcal{P}_N' \subset \mathcal{M}_N$ (sono insiemi chiusi), e che

$$m_N(x_0 + P(u_1 ... u_N)) = m_N(P(u_1 ... u_N))$$

per l'invarianza per traslazioni di m_N. Inoltre, se $P = \prod_{i=1}^{N} [a_i, b_i] \in \mathcal{P}_N$, allora $P = a + \sum_{i=1}^{N} t_i (b_i - a_i) e_i = a + P((b_1 - a_1)e_1, ..., (b_N - a_N)e_N)$, ove $a = (a_1 ... a_N)$ e $(e_1, ..., e_N)$ è la base canonica di $\mathbb{R}^N$.

Vogliamo ora definire il "volume elementare" $V_N(P)$ per ogni $P \in \mathcal{P}_N'$, definito come base $(N-1)$-dimensionale per altezza. Lo faremo, più in generale, per i parallelepipedi (non necessariamente rettangoli) m-dimensionali di $\mathbb{R}^N$ ($m \le N$).

Per $m=1$, $V_1(P(u_1)) = |u_1|_N$

Per $m=2$, scriviamo $u_2 = b+c$, con $(b,u_1)_N = 0$ e $c \parallel u_1$. La base di $P(u_1,u_2)$ è $|u_1|_N$, l'altezza è $|b|_N$, quindi $V_2(P(u_1,u_2)) = |u_1|_N |b|_N$.

Se conosciamo $V_{m-1}(P(u_1,\dots,u_{m-1}))$, definiamo $V_m(P(u_1 \dots u_m))$: scriviamo $u_m = b+c$, con $(b,u_j)_N = 0$, $j=1,2,\dots,N-1$, e $c = \sum_{j=1}^{N-1} a_j u_j$. La base di $P(u_1 \dots u_m)$ è $V_{m-1}(P(u_1,\dots,u_{m-1}))$, l'altezza è $|b|_N$, quindi $V_m(P(u_1,\dots,u_m)) = V_{m-1}(P(u_1,\dots,u_{m-1}))|b|_N$.

Questa definizione è alquanto scomoda; fortunatamente c'è un modo alternativo di scrivere il volume degli elementi di P_N^1.

Proposizione Siano $u_1 \dots u_m \in \mathbb{R}^N$. Detta A la matrice $m \times n$ le cui righe sono i vettori $u_1 \dots u_m$ (scriveremo $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$), si ha

$$V_m(P(u_1,\dots,u_m)) = \sqrt{\det(AA^t)}.$$

dim Notiamo che AA^t è $m \times m$. Inoltre osserviamo che permutando le righe di A, la formula non cambia: infatti, sia $\sigma: \{1,\dots,m\} \to \{1,\dots,m\}$ una permutazione (cioè una mappa biiettiva); se P è la matrice associata a σ, vale a dire $P = \{p_{ij}\}$ con $p_{ij} = 1$ se $j = \sigma(i)$, $p_{ij} = 0$ altrimenti, la permutata A' di A è $A' = PA$, poiché

$$a'_{ij} = \sum_{h=1}^{m} p_{ih} a_{hj} = p_{i\sigma(i)} a_{\sigma(i)j} = a_{\sigma(i)j}.$$

Quindi, essendo $\det P = \operatorname{sgn}(\sigma) = \pm 1$,

$$\det(PA(PA)^t) = \det(PAA^tP) = (\det P)^2 \det AA^t = \det AA^t.$$

Dunque, non importa quali $m-1$ vettori si scelgano come base di $P(u_1 \dots u_m)$.

La proposizione è dimostrata per induzione. Se $m=1$, A ha la sola riga u_1, $AA^t = |u_1|_N^2$, $\sqrt{\det AA^t} = |u_1|_N = V_1(P(u_1))$ e la tesi è vera.

Se vale la tesi per matrici di $m-1$ righe, consideriamo una matrice A di m righe. Scriviamo

$$u_1 = b + c, \quad \text{con } (b, u_i)_N = 0, \ 2 \le i \le m, \ \text{e } c = \sum_{i=2}^{m} \lambda_i u_i .$$

Sottraiamo dalla 1ª riga la 2ª moltiplicata per λ_2, la 3ª moltiplicata per $\lambda_3, \dots$, la m-sima moltiplicata per λ_m. Si ottiene una nuova matrice $A' = PA$ ove

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 & \cdots & -\lambda_m \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}, \quad \det P = 1;$$

la 1ª riga di A' è $u_1 - c = b_1$, e il resto è il blocco $D = \begin{pmatrix} u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$.

Da una parte si ha

$$\det(A' A'^t) = \det(PAA^t P^t) = |\det P|^2 \det AA^t = \det AA^t,$$

e dall'altra

$$A' A'^t = \begin{pmatrix} b_1 \\ D \end{pmatrix} (b_1^t \ D^t) = \begin{pmatrix} b_1 b_1^t & b_1 D^t \\ D b_1^t & DD^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |b_1|_N^2 & 0 \\ 0 & DD^t \end{pmatrix}$$

poiché $b_1 D^t = \begin{pmatrix} (b_1, u_2)_N \\ \vdots \\ (b_1, u_m)_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, da cui $\det A'A'^t = |b_1|_N^2 \det DD^t$.

Quindi

$$\sqrt{\det AA^t} = |b_1|_N \sqrt{\det DD^t} = |b_1|_N \, V_{m-1}(P(u_2 \dots u_{m}))\,.$$

Ciò prova il passo induttivo. □

In definitiva, il volume elementare di ogni parallelepipedo m-dimensionale in $\mathbb{R}^N$ è

$$V_m(P(u_1 \dots u_m)) = \sqrt{\det AA^t}, \quad A = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix},$$

ovvero, per la formula di Cauchy-Binet, $V_m(P(u_1 \dots u_m))$ è la radice quadrata della somma dei quadrati di tutti i minori $m \times m$ della matrice A.

In particolare, se $m=N$, e $P=P(u_1,\dots,u_N)\in \mathcal{P}'_N$, allora

$$V_N(P(u_1,\dots,u_N))=\sqrt{\det AA^t}=|\det A|,\quad \text{ove } A=\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_N\end{pmatrix}.$$

Si noti che se $P\in\mathcal{P}_N$, ossia

$$P=a+P((b_1-a_1)e_1,\dots,(b_N-a_N)e_N),$$

allora

$$V_N(P)=V_N(P((b_1-a_1)e_1,\dots,(b_N-a_N)e_N))=\left|\det\begin{pmatrix}b_1-a_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & b_N-a_N\end{pmatrix}\right|=\prod_{i=1}^N(b_i-a_i),$$

e si torna alla definizione di volume elementare per parallelepipedi rettangoli.

Una volta definito il volume elementare degli elementi di $\mathcal{P}'_N$, dobbiamo assicurarci, come già fatto a suo tempo nel caso del volume di parallelepipedi rettangoli, che la misura di Lebesgue su $\mathcal{P}'_N$ coincide col volume elementare.

<u>Proposizione</u> Se $P=P(u_1,\dots,u_N)\in\mathcal{P}'_N$, allora $m_N(P)=V_N(P)$.

<u>dim.</u> Si è già osservato che $P\in\mathcal{M}_N$. Consideriamo la funzione ausiliaria

$$f(u_1,\dots,u_N)=m_N(P(u_1\dots u_N))\,\mathrm{sgn}(\det A),\quad \text{ove } A=\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_N\end{pmatrix}.$$

Proveremo:

(i) $f(e_1,\dots,e_N)=1$,

(ii) $f(u_{\sigma(1)},\dots,u_{\sigma(N)})=\mathrm{sgn}(\sigma)\,f(u_1,\dots,u_N)$ per ogni permutazione $\sigma:\{1,\dots,N\}\to\{1,\dots,N\}$;

(iii) $f(u_1,\dots,\lambda u_i,\dots,u_N)=\lambda f(u_1,\dots,u_i,\dots,u_N)\quad \forall\lambda\in\mathbb{R},\ \forall i=1\dots N$;

(iv) $f(u_1,\dots,u_i+w,\dots,u_N)=f(u_1,\dots,u_i,\dots,u_N)+f(u_1,\dots,w,\dots,u_N)\quad\forall w\in\mathbb{R}^N,\ \forall i=1\dots N$.

Da qui seguirà che f è N-lineare (cioè lineare in ciascuna variabile), è alternante, e vale 1 sulla base canonica: per l'unicità della funzione con queste proprietà, deve essere $f(u_1\dots u_N)=\det\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_N\end{pmatrix}$, e pertanto

$$m_N(P(u_1,\dots,u_N))=\left|\det\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_N\end{pmatrix}\right|.$$

Proviamo (i):

$$f(e_1,\dots,e_N) = m_N\big(P(e_1,\dots,e_N)\big)\cdot 1 = 1$$

Proviamo (ii):

Dato che $P(u_{\sigma(1)},\dots,u_{\sigma(N)}) = P(u_1,\dots,u_N)$ per definizione, si ha

$$f(u_{\sigma(1)},\dots,u_{\sigma(N)}) = m_N\big(P(u_{\sigma(1)},\dots,u_{\sigma(N)})\big)\,\mathrm{sgn}\det\begin{pmatrix} u_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ u_{\sigma(N)}\end{pmatrix} =$$

$$= m_N\big(P(u_1,\dots,u_N)\big)\,\mathrm{sgn}\,\sigma\cdot\det\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N\end{pmatrix} = \mathrm{sgn}\,\sigma\, f(u_1,\dots,u_N).$$

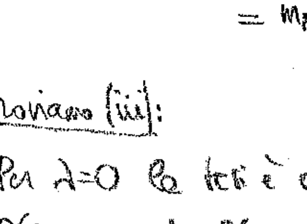
Proviamo (iii):

Per $\lambda=0$ la tesi è ovvia perché $m_N\big(P(0,v_2,\dots,v_N)\big)=0$ dato che $P(0,v_2,\dots,v_N) = P(v_2,\dots,v_N)$ è contenuto in un sottospazio $(N-1)$-dimensionale.

Per $\lambda\neq 0$ basta mostrare che (caso $i=1$; gli altri sono uguali)

$$m_N\big(P(\lambda u_1,u_2,\dots,u_N)\big) = |\lambda|\, m_N\big(P(u_1,u_2,\dots,u_N)\big).$$

Se $\lambda>0$, supponiamo dapprima $\lambda=\frac{k}{h}\in\mathbb{Q}^+$. Scriviamo



$$P\Big(\tfrac{k}{h}u_1,u_2,\dots,u_N\Big) = \bigcup_{j=0}^{k-1}\Big[\tfrac{j}{h}u_1 + P\Big(\tfrac{1}{h}u_1,u_2,\dots,u_N\Big)\Big]$$

e questi parallelepipedi sono adiacenti e traslati l'uno dell'altro. Perciò

$$m_N\Big(P\Big(\tfrac{k}{h}u_1,u_2,\dots,u_N\Big)\Big) = k\, m_N\Big(P\Big(\tfrac{1}{h}u_1,u_2,\dots,u_N\Big)\Big) =$$

$$= \frac{k}{h}\Big[h\, m_N\Big(P\Big(\tfrac{1}{h}u_1,u_2,\dots,u_N\Big)\Big)\Big] = \frac{k}{h}\, m_N\big(P(u_1,u_2,\dots,u_N)\big).$$

Se ora $\lambda\in\mathbb{R}^+$, sia $\{q_n\}\subseteq\mathbb{Q}^+$ tale che $q_n\to\lambda$. Allora

$$P(q_n u_1,u_2,\dots,u_N)\subseteq P(q_{n+1}u_1,u_2,\dots,u_N),\qquad \bigcup_{n=1}^{\infty}P(q_n u_1,u_2,\dots,u_N) = \mathring{P}(\lambda u_1,u_2,\dots,u_N)$$

e dunque

$$m_N(P(\lambda u_1,u_2,\dots,u_N)) = m_N(\mathring{P}(\lambda u_1,u_2,\dots,u_N)) = \lim_{n\to\infty} m_N(P(q_n u_1,u_2,\dots,u_N)) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} q_n\, m_N(P(u_1\dots u_N)) = \lambda\, m_N(P(u_1,\dots,u_N)).$$

Se, infine, $\lambda<0$, scriviamo

$$P(u_1,u_2,\dots,u_N) = P(u_1)+P(u_2,u_3,\dots,u_N) = u_1+P(-u_1)+P(u_2,\dots,u_N) =$$
$$= u_1+P(-u_1,u_2,\dots,u_N)$$

(poiché $P(u_1)=\{\lambda u_1:\lambda\in[0,1]\}=\{(1-t)u_1: t\in[0,1]\} = u_1+\{t(-u_1):t\in[0,1]\} = u_1+P(-u_1)$).

Dunque se $\lambda<0$

$$m_N(P(\lambda u_1,u_2,\dots,u_N)) = m_N(P(-\lambda u_1,u_2,\dots,u_N)) = -\lambda\, m_N(P(u_1\dots u_N)).$$

In definitiva

$$m_N(P(\lambda u_1,u_2,\dots,u_N)) = \begin{cases} \lambda\, m_N P(u_1,\dots,u_N) & \text{se } \lambda\geq 0 \\ -\lambda\, m_N(P(u_1\dots u_N)) & \text{se } \lambda<0 \end{cases} = |\lambda|\, m_N(P(u_1\dots u_N)).$$

<u>Proviamo (iv)</u>: Sia $W\in\mathbb{R}^N$, $W=c_1u_1+c_2u_2+\dots+c_Nu_N$. Dobbiamo provare che (caso $i=1$; gli altri sono uguali)

$$f(u_1+W,u_2,\dots,u_N) = f(u_1,u_2,\dots,u_N)+f(W,u_2,\dots,u_N).$$

Notiamo che

⊛ $$\det\begin{pmatrix} u_1+W \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N\end{pmatrix} = (1+c_1)\det\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N\end{pmatrix}, \text{ essendo } \det\begin{pmatrix} c_2u_2+\dots+c_Nu_N \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N\end{pmatrix}=0.$$

D'altra parte risulta

⊛⊛ $$m_N(P(u_1+W,u_2,\dots,u_N)) = |1+c_1|\, m_N(P(u_1,u_2,\dots,u_N)):$$

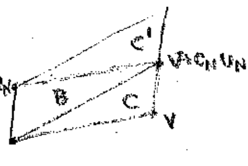
infatti: poniamo $V=u_1+c_1u_1+c_2u_2+\dots+c_{N-1}u_{N-1}$; allora $u_1+W=V+c_Nu_N$ e

$$m_N(P(u_1+W,u_2,\dots,u_N)) = \frac{1}{|c_N|}\, m_N(P(V+c_Nu_N, c_Nu_N, u_2,\dots,u_{N-1}));$$

d'altra parte

$P(V+c_Nu_N, c_Nu_N, u_2,\dots,u_{N-1}) = [B\cup C'] + P(u_2,\dots,u_{N-1})$,

$P(V, c_Nu_N, u_2,\dots,u_{N-1}) = [B\cup C] + P(u_2,\dots,u_{N-1})$



ove
$$B = \{\lambda_1(v + c_N u_N) + \lambda_2 c_N u_N : \lambda_1, \lambda_2 \in [0,1],\ \lambda_1 + \lambda_2 \le 1\},$$
$$C = \{\lambda_1 v + \lambda_2 (v + c_N u_N) : \lambda_1, \lambda_2 \in [0,1],\ \lambda_1 + \lambda_2 \le 1\},$$
$$C' = \{\lambda_1(v + c_N u_N) + \lambda_2 c_N u_N : \lambda_1, \lambda_2 \in [0,1],\ \lambda_1 + \lambda_2 \ge 1\} = C + c_N u_N,$$
e dunque
$$m_N(P(u_1 + w, u_2, \dots, u_N)) = \frac{1}{|c_N|} m_N(P(v + c_N u_N, c_N u_N, u_2, \dots, u_{N-1})) =$$
$$= \frac{1}{|c_N|} m_N(P(v, c_N u_N, u_2, \dots, u_N)),$$
ossia
$$m_N(P(u_1 + c_1 u_1 + \dots + c_N u_N, u_2, \dots, u_N)) = m_N(P(u_1 + c_1 u_1 + \dots + c_{N-1} u_{N-1}, u_2, \dots, u_N)).$$
In modo assolutamente analogo si prova che
$$m_N(P(u_1 + c_1 u_1 + \dots + c_N u_N, u_2, \dots, u_N)) = \dots = m_N(P(u_1 + c_1 u_1, u_2, \dots, u_N)).$$
Infine per (iii)
$$m_N(P(u_1 + c_1 u_1, u_2, \dots, u_N)) = |1 + c_1|\, m_N(P(u_1, u_2, \dots, u_N)),$$
come richiesto. Da ⊛ e ⊛⊛ segue finalmente
$$f(u_1 + w, u_2, \dots, u_N) = (1 + c_1)\, m_N(P(u_1, \dots, u_N))\, \mathrm{sgn}\left(\det\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N\end{pmatrix}\right) =$$
$$= f(u_1, \dots, u_N) + f(c_1 u_1, u_2, \dots, u_N)$$
e poiché, con analogo calcolo,
$$f(w, u_2, \dots, u_N) = f(c_1 u_1, u_2, \dots, u_N),$$
anche (iv) è provata. Ciò conclude la dimostrazione della Proposizione. □

Corollario Se $T(x) = Ax + b$ è una trasformazione affine di $\mathbb{R}^N$ in sé, allora per ogni $E \in \mathcal{M}_N$ si ha
$$m_N(T(E)) = |\det A|\, m_N(E).$$

dim. Se $E = P = \prod_{i=1}^N [a_i, b_i] \in \mathcal{P}_N$, si ha $P = a + P((b_1 - a_1)e_1, \dots, (b_N - a_N)e_N)$ e dunque
$$T(P) = T(a) + b + P((b_1 - a_1)Te_1, \dots, (b_N - a_N)Te_N),$$
da cui $m_N(T(P)) = m_N(P((b_1 - a_1)Te_1, \dots, (b_N - a_N)Te_N)) = \prod_{i=1}^N (b_i - a_i) \left|\det\begin{pmatrix} Te_1 \\ \vdots \\ Te_N\end{pmatrix}\right| = m_N(P)\,|\det A|$.

Se $E=\bigcup_{j=1}^{k} P_j$, con $P_j\in\mathcal{P}_N$, con un numero finito di tagli paralleli agli assi si scrive $E=\bigcup_{i=1}^{h} R_i$, con $R_i\in\mathcal{P}_N$ e privi di punti interni comuni, e la relazione cercata segue allora per additività.

Se E è un aperto, $T(E)$ è aperto e quindi $T(E)\in\mathcal{M}_N$; inoltre esiste una successione $\{R_n\}\subseteq\mathcal{M}_N$, tale che $R_n\subset R_{n+1}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty}R_n=E$, e R_n è unione finita di parallelepipedi, dato che $T(E)=\bigcup_{n=1}^{\infty}T(R_n)$, dalla relazione

$$m_N(T(R_n))=|\det A|\,m_N(R_n)\qquad\forall n\in\mathbb{N}$$

segue la relazione per E passando al limite per $n\to\infty$

Se E è chiuso, $T(E)$ è chiuso e quindi $T(E)\in\mathcal{M}_N$. Se B_n è la palla aperta di centro $0\in\mathbb{R}^N$ e raggio n, poiché $B_n\setminus E$ è aperto si ha

$$m_N(T(B_n\cap E))=m_N(T(B_n))-m_N(T(B_n\setminus E))=$$
$$=|\det A|\left[m_N(B_n)-m_N(B_n\setminus E)\right]=|\det A|\,m_N(B_n\cap E),$$

e per $n\to\infty$ si ottiene la relazione per E.

Infine se $E\in\mathcal{M}_N$, per ogni $n\in\mathbb{N}^+$ esistono A_n aperto e C_n chiuso tali che

$$A_n\supseteq A_{n+1}\supseteq E\supseteq C_{n+1}\supseteq C_n,\qquad m_N(A_n\setminus C_n)<\frac{1}{n}.$$

Quindi $T(A_n)\supseteq T(A_{n+1})\supseteq T(E)\supseteq T(C_{n+1})\supseteq T(C_n)$, $T(A_n)$ è aperto, $T(C_n)$ è chiuso, e $m_N(T(A_n)\setminus T(C_n))=|\det A|\,m_N(A_n\setminus C_n)<|\det A|/n$.

Perciò $T(E)\in\mathcal{M}_N$, e

$$m_N(T(E))=\lim_{n\to\infty}m_N(T(C_n))=\lim_{n\to\infty}|\det A|\,m_N(C_n)=|\det A|\,m_N(E).\ \square$$

Il passo successivo riguarda il caso generale di una trasformazione bigettiva $g:A\to B$ con A,B aperti di $\mathbb{R}^N$ e g,g^{-1} di classe C^1 con $J_g(x)\neq 0$ in A. Si noti che, di conseguenza, $J_{g^{-1}}(y)=\left[J_g(g^{-1}(y))\right]^{-1}\neq 0$ in B.

Il punto chiave dell'intera argomentazione sta nel lemma che segue, che descrive quanto il trasformato $g(C)$ di un cubo $C\subset\mathbb{R}^N$ differisca dal trasformato di C mediante un'opportuna applicazione affine (il cui grafico [illegible]

Prima di enunciare il Lemma, un po' di notazioni. Sia Ω un aperto limitato tale che $\overline{\Omega} \subset A$. Poniamo

$$M = \max\left\{ \max_{x\in\overline{\Omega}} |Dg(x)|_{N\times N},\ \max_{y\in \overline{g(\Omega)}} |Dg^{-1}(y)|_{N\times N} \right\}$$

$$\mu = d(\partial B, \overline{g(\Omega)}) = \min_{y\in\partial B} d(y, \overline{g(\Omega)}) \quad [\mu > 0]$$

$$(g(\Omega))_r = \{ y\in B : d(y, \overline{g(\Omega)}) \le r \}, \quad r\in]0,\mu[.$$

Sia $p > M\sqrt{N}$. Poiché $\overline{\Omega}$ è compatto, g è differenziabile in $\overline{\Omega}$ e Dg è uniformemente continua in $\overline{\Omega}$, per ogni $u\in\Omega$ e per ogni $\varepsilon>0$ esiste $\sigma>0$, dipendente da ε ma indipendente da u, tale che

$$x\in\overline{\Omega},\ |x-u|_N < \sigma \Rightarrow |g(x) - g(u) - Dg(u)(x-u)|_N < \frac{\varepsilon}{p}|x-u|_N ,$$

ed anche

$$y\in \overline{(g(\Omega))_{\mu/2}},\ |y-g(u)|_N<\sigma \Rightarrow |g^{-1}(y) - u - Dg^{-1}(g(u))(y-g(u))|_N < \frac{\varepsilon}{p}|y-g(u)|_N .$$

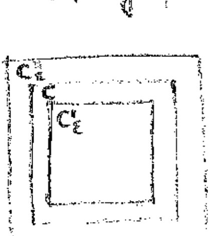
Se C è un cubo contenuto in $\overline{\Omega}$ di centro $u\in\Omega$ e spigolo $d>0$, indichiamo con C'_ε e C''_ε i cubi aperti di centro u e spigoli $d(1-\varepsilon)$ e $d(1+\varepsilon)$ rispettivamente.

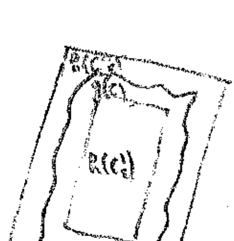
<u>Lemma</u> Per ogni $\varepsilon>0$ esiste $\delta>0$ tale che per qualunque cubo $C\subseteq\overline{\Omega}$ di centro $u\in\Omega$ e spigolo $d\in]0, \delta/\sqrt{N}[$ si ha

$$h(C'_\varepsilon) \subseteq g(C) \subseteq h(C''_\varepsilon)$$

ove h è l'applicazione affine

$$h(x) = g(u) + Dg(u)(x-u), \quad x\in\mathbb{R}^N .$$





<u>dim.</u> Sia $\varepsilon>0$. Proviamo la seconda inclusione. Sia $y\in g(C)$: sarà $y = g(x)$, con $x\in C$. Poniamo $z = h^{-1}(y)$ (ricordiamo che h è invertibile perché $Dg(u)$ è

invertibile; si noti che da $y = h(z)$ segue
$$h^{-1}(y) = u + Dg^{-1}(g(u))(y - g(u)),$$
formula che useremo più avanti). Dobbiamo provare che $z \in C''_\varepsilon$. Si ha
$$|z_i - u_i| \le |z_i - x_i| + |x_i - u_i| \le |z_i - x_i| + \frac{d}{2}.$$
Inoltre
$$|z_i - x_i| \le |z - x|_N = \left|Dg^{-1}(g(u)) \cdot Dg(u) \cdot (z - x)\right|_N \le$$
$$\le M\,|Dg(u)(z - x)|_N = M\,|h(x) - h(z)|_N = M\,|h(x) - g(x)|_N =$$
$$= M\,|g(u) - g(x) + Dg(u) \cdot (x - u)|_N \le \frac{M\varepsilon}{\rho}\,|x - u|_N$$
purchè risulti $|x - u|_N < \sigma$; ma se si sceglie $\delta < 2\sigma$ si ha effettivamente
$$|x - u|_N = \left[\sum_{i=1}^{N} |x_i - u_i|^2\right]^{1/2} \le \sqrt{N}\,\frac{d}{2} < \frac{\delta}{2} < \sigma.$$
Quindi si ottiene
$$|z_i - u_i| \le \frac{M\varepsilon}{\rho}\,|x - u|_N + \frac{d}{2} \le \left(\frac{M\varepsilon\sqrt{N}}{\rho} + 1\right)\frac{d}{2} < \frac{d(1+\varepsilon)}{2},$$
cioè $z \in C''_\varepsilon$.

Proviamo la prima inclusione. Sia $y \in h(C'_\varepsilon)$: sarà $y = h(v)$ con $v \in C'_\varepsilon$. Mostriamo anzitutto che $y \in \overline{(g(\Omega))}_{\mu/2}$ (e dunque $y \in B$): in effetti si ha
$$|y - g(u)|_N = |h(v) - g(u)|_N = |Dg(u)(v - u)|_N \le M\,|v - u|_N \le M\,\frac{d\sqrt{N}}{2}(1-\varepsilon) <$$
$$< \frac{Md\sqrt{N}}{2} < M\,\frac{\delta}{2},$$
e se si sceglie $\delta < \frac{\mu}{M}$ si ottiene $|y - g(u)|_N \le \frac{\mu}{2}$, e dunque (essendo $u \in \Omega$) $y \in \overline{(g(\Omega))}_{\mu/2}$. Possiamo dunque a buon diritto porre $x = g^{-1}(y) \in A$. Per provare che $y \in g(C)$ dobbiamo mostrare che $x \in C$. Si ha
$$|x_i - u_i| \le |x_i - v_i| + |v_i - u_i| \le |x_i - v_i| + \frac{d(1-\varepsilon)}{2}.$$
D'altra parte, usando l'espressione di h^{-1} sopra scritta,
$$|x_i - v_i| \le |x - v|_N = |g^{-1}(y) - h^{-1}(y)|_N = |g^{-1}(y) - u - Dg^{-1}(g(u)) \cdot (y - g(u))|_N;$$

quindi se si sceglie $\delta < \frac{2\sigma}{M}$ si ottiene come prima

$$|y-g(u)|_N \le \frac{M\delta}{2} < \sigma$$

da cui finalmente

$$|x_i - v_i| \le \frac{\varepsilon}{p} |y-g(u)|_N \le \frac{\varepsilon}{p} \frac{|M|\sqrt{N}}{2} d(1-\varepsilon) < \frac{\varepsilon d}{2}$$

e pertanto

$$|x_i - u_i| \le \frac{\varepsilon d}{2} + \frac{d(1-\varepsilon)}{2} = \frac{d}{2},$$

cioè $x \in C$. Il Lemma è provato, con $\delta < \min\left\{2\sigma, \frac{\mu}{M}, \frac{2\sigma}{M}\right\}$. □

Proviamo finalmente il teorema 1, cominciando con i sottoinsiemi misurabili E di un fissato aperto limitato $\Omega \subseteq \overline{\Omega} \subset A$. Come sempre, il punto cruciale è provare il caso in cui E è un parallelepipedo. Fissato $\varepsilon > 0$, decomponiamo E nell'unione di una famiglia numerabile di cubi C_i, privi di punti interni comuni, centrati in punti $u_i \in E$ e di spigolo di $< \delta/\sqrt{N}$, dove δ è il numero fornito dal Lemma. Poiché J_g è uniformemente continuo in $\overline{\Omega}$, possiamo supporre, rimpicciolendo eventualmente δ, che

$$x, x' \in \overline{\Omega}, \ |x-x'|_N < \delta \implies |J_g(x) - J_g(x')| < \varepsilon.$$

Poniamo

$$h_i(x) = g(u_i) + Dg(u_i)(x-u_i), \quad x \in \mathbb{R}^N;$$

il Lemma precedente ci dice che

$$(\ast\ast\ast) \qquad h_i((C_i)'_\varepsilon) \subseteq g(C_i) \subseteq h_i((C_i)''_\varepsilon) \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Proviamo che $g(E)$ è misurabile. Si ha

$$\bigcup_{i=1}^\infty h_i((C_i)'_\varepsilon) \subseteq g(E) \subseteq \bigcup_{i=1}^\infty h_i((C_i)''_\varepsilon),$$

con

$$m_N\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} h_i((C_i)'_\varepsilon)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m_N(h_i((C_i)'_\varepsilon)) = (1-\varepsilon)^N \sum_{i=1}^{\infty} |Jg(u_i)|\, m_N(C_i),$$

$$m_N\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} h_i((C_i)''_\varepsilon)\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m_N(h_i((C_i)''_\varepsilon)) = (1+\varepsilon)^N \sum_{i=1}^{\infty} |Jg(u_i)|\, m_N(C_i),$$

Quindi

$$m_N\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} h_i((C_i)''_\varepsilon) \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} h_i((C_i)'_\varepsilon)\right) \leq \left[(1+\varepsilon)^N - (1-\varepsilon)^N\right] \sum_{i=1}^{\infty} |Jg(u_i)|\, m_N(C_i) \leq$$

$$\leq \left[(1+\varepsilon)^N - (1-\varepsilon)^N\right] \max_{\Omega} |Jg| \cdot m_N(E),$$

e poiché l'ultimo membro è infinitesimo, si ha a maggior ragione

$$m_N^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} h_i((C_i)''_\varepsilon) \setminus g(E)\right) \longrightarrow 0 \quad \text{per } \varepsilon \to 0,$$

il che prova, essendo $\bigcup_{i=1}^{\infty} h_i((C_i)''_\varepsilon)$ aperto, che $g(E)$ è misurabile.

Adesso utilizziamo le inclusioni ⊛⊛⊛ per valutare $m_N(g(E))$.

Dalla prima segue

$$m_N(g(E)) = \sum_{i=1}^{\infty} m_N(g(C_i)) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m_N(h_i((C_i)'_\varepsilon)) = (1-\varepsilon)^N \sum_{i=1}^{\infty} |Jg(u_i)|\, m_N(C_i) =$$

$$= (1-\varepsilon)^N \sum_{i=1}^{\infty} \int_{C_i} |Jg(u_i)|\, dx \geq$$

$$\geq (1-\varepsilon)^N \sum_{i=1}^{\infty} \left[\int_{C_i} |Jg(x)|\, dx - \int_{C_i} \left|Jg(u_i) - Jg(x)\right| dx\right] \geq$$

$$\geq (1-\varepsilon)^N \left[\int_E |Jg(x)|\, dx - \varepsilon\, m_N(E)\right];$$

dalla seconda, analogamente, segue

$$m_N(g(E)) = \sum_{i=1}^{\infty} m_N(g(C_i)) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m_N(h_i((C_i)''_\varepsilon)) = (1+\varepsilon)^N \sum_{i=1}^{\infty} |Jg(u_i)|\, m_N(C_i) \leq$$

$$\leq (1+\varepsilon)^N \sum_{i=1}^{\infty} \left[\int_{C_i} |Jg(x)|\, dx + \int_{C_i} \left|Jg(u_i) - Jg(x)\right| dx\right] \leq$$

$$\leq (1+\varepsilon)^N \left[\int_E |Jg(x)|\, dx + \varepsilon\, m_N(E)\right].$$

Per l'arbitrarietà di ε, si ha

$$m_N(g(E)) = \int_E |J_g(x)|\,dx \qquad \forall E \in \mathcal{P}_N,\ E \subseteq \Omega.$$

Poi si passa, per additività, alle unioni finite di parallelepipedi (privi di punti interni comuni) contenuti in Ω; poi, per il teorema di B. Levi, agli aperti contenuti in Ω. Per un chiuso $E \subset \Omega$, basta scrivere la formula per Ω e per $\Omega \setminus E$, che sono aperti, e poi sottrarre. In questi casi $g(E)$ è misurabile perché unione di trasformati di parallelepipedi, perché aperto o perché chiuso.

Sia ora $E \in \mathcal{M}_N$, $E \subset \Omega$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ siano A_n aperto e C_n chiuso, tali che $\Omega \supseteq A_n \supseteq E \supseteq C_n$ e $m_N(A_n \setminus C_n) < \frac{1}{n}$. Allora $g(A_n)$ è aperto, $g(C_n)$ è chiuso con $g(A_n) \supseteq g(E) \supseteq g(C_n)$ e

$$m_N(g(A_n) \setminus g(C_n)) = m_N(g(A_n \setminus C_n)) = \int_{A_n \setminus C_n} |J_g(x)|\,dx \le \max_{\Omega} |J_g| \frac{1}{n};$$

ne segue a maggior ragione

$$m(g(E) \setminus g(C_n)) \to 0 \quad \text{per } n \to \infty,$$

e quindi $g(E)$ è misurabile. Inoltre, da

$$m(g(C_n)) = \int_{C_n} |J_g(x)|\,dx$$

per $n \to \infty$ segue la formula per E.

Infine togliamo la dipendenza dall'aperto limitato Ω. Sia per ogni n

$$A_n = \{x \in A : d(x, \partial A) > \tfrac{1}{n},\ |x|_N < \tfrac{1}{n}\}.$$

Se $E \in \mathcal{M}_N$, $E \subseteq A$, la formula vale per $E \cap A_n$, in quanto A_n è un aperto limitato. Poiché

$$g(E) = \bigcup_n (g(E \cap A_n))$$

$g(E)$ è misurabile. Inoltre, per il teorema di B. Levi la formula vale anche per E. Il teorema 1 è completamente dimostrato. $\square$