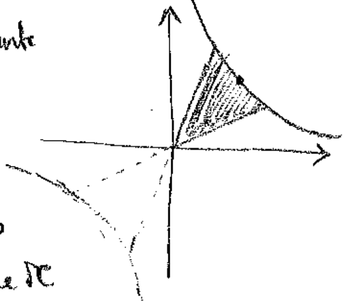
Esempio. Consideriamo l'integrale

$$\int_A \ln(1+xy)\,dx\,dy, \qquad A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le xy\le 2,\ y\le 2x,\ 2y\ge x\}.$$

L'insieme A è contenuto nel 1° quadrante (per x,y negativi le relazioni $y\le 2x$ e $2y\ge x$ sono incompatibili).



Dato che le quantità xy, $\frac{y}{x}$ si muovono negli intervalli $[0,2]$ e $[\frac{1}{2},2]$, si può fare il cambiamento di variabili $xy=u$, $\frac{y}{x}=v$. Si noti che, secondo le notazioni della scorsa lezione, questo cambiamento di variabili definisce g^{-1}, non g. Ci sono 2 strade: (1) ricavare g e calcolare $J_g(u,v)$, (2) calcolare $J_{g^{-1}}(x,y)$ e ricavare poi $J_g(u,v)=\dfrac{1}{J_{g^{-1}}(g(u,v))}$.

Percorriamo entrambe le strade.

(1). $\begin{cases} xy=u \\ \frac{y}{x}=v \end{cases} \iff \begin{cases} xy=u \\ y=vx \end{cases} \iff \begin{cases} vx^2=u \\ y=vx \end{cases} \iff \begin{cases} x=\sqrt{\frac{u}{v}} \\ y=\sqrt{uv} \end{cases}$ Quindi $g\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{u}{v}} \\ \sqrt{uv} \end{pmatrix}$.

e $J_g(u,v)=\det\begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{u}}{v^{3/2}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} \end{pmatrix}=\frac{1}{2v}$;

(2) $J_{g^{-1}}(x,y)=\det\begin{pmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix}=\frac{2y}{x}$, $\quad J_{g^{-1}}(g(u,v))=2v=\dfrac{1}{J_g(u,v)}$.

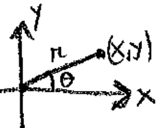
In definitiva

$$\int_A \ln(1+xy)\,dx\,dy=\int_0^2\left[\int_{1/2}^2 \ln(1+u)\frac{1}{2v}\,dv\right]du=\int_0^2 \ln(1+u)\left[\tfrac{1}{2}\ln v\right]_{1/2}^2 du=$$

$$=\ln 2\left[\left[(u+1)\ln(1+u)\right]_0^2-\int_0^2 1\,du\right]=(\ln 2)(3\ln 3-2).$$

<u>Coordinate polari in $\mathbb{R}^2$</u> Per $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ poniamo

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}, \text{ cioè } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g(r,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$



ove $\theta\in[0,2\pi]$, $r\geq 0$. Il problema di questa g è che essa è surgettiva (ogni (x,y) è immagine di qualche (r,θ)) ma non iniettiva, perché $g(0,\theta)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ per ogni $\theta\in[0,2\pi]$, e $g(r,0)=g(r,2\pi)$ per ogni r. Tuttavia, considerando $B=\mathbb{R}^2\setminus\{(x,0): x\geq 0\}$, si ha $B=g(A)$, ove $A=\{(r,\theta): r>0,\ 0<\theta<2\pi\}$ e g è bigettiva e C^1 da A in B; inoltre $J_g(r,\theta)=\det\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}=r$ per ogni $(r,\theta)\in A$.

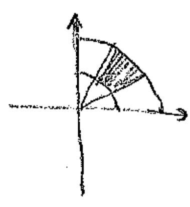
Quindi, per ogni f integrabile su B,

$$(*)\quad \int_B f(x,y)\,dx\,dy = \int_A f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta .$$

Si noti però che $\mathbb{R}^2\setminus B=\{(x,0): x\geq 0\}$ è un insieme di misura nulla in $\mathbb{R}^2$, e analogamente $\{(r,\theta): r=0 \text{ oppure } \theta=0 \text{ oppure } \theta=2\pi\}$ ha misura nulla in $[0,\infty[\times[0,2\pi]$. Perciò in $(*)$ possiamo rimpiazzare B con $\mathbb{R}^2$ e A con $[0,\infty[\times[0,2\pi]$ senza alcun problema. Pertanto si può enunciare:

<u>Proposizione</u> Sia $F\in\mathcal{M}_2$, sia f integrabile su F. Posto $E=g^{-1}(F)=\{(r,\theta): (r\cos\theta, r\sin\theta)\in F\}$, si ha

$$\int_F f(x,y)\,dx\,dy = \int_E f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta .$$



<u>Esempi</u> (1) $\displaystyle\int_F x\,dx\,dy$, $F=\left\{1\leq x^2+y^2\leq 4,\ \frac{x}{2}\leq y\leq 2x\right\}$

Si ha $F=g(E)$, $E=\left\{(r,\theta): 1\leq r\leq 2,\ \frac{1}{2}\leq \operatorname{tg}\theta\leq 2\right\}$

e dunque

$$\int_F x\,dx\,dy = \int_1^2\int_{\operatorname{arctg}\frac12}^{\operatorname{arctg}2} r\cos\theta\cdot r\,dr = \int_1^2 r^2\,dr\,\Big[\sin\theta\Big]_{\operatorname{arctg}\frac12}^{\operatorname{arctg}2} =$$

$$= \frac{7}{3}\cdot\left[\sin\operatorname{arctg}2 - \sin\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right] = \frac{7}{3}\left[\frac{2}{\sqrt5}-\frac{1}{\sqrt5}\right] = \frac{7}{3\sqrt5}.$$

(2) $\int_F \frac{y}{x^2+y^2}\,dx\,dy$, $\quad F=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 4,\ x\ge \frac{1}{2},\ y\ge 0\}$

L'insieme F è l'immagine di

$$E=\{(r,\theta):\ r\le 2,\ \ r\cos\theta\ge \tfrac{1}{2}\}=\{(r,\theta):\ 0\le\theta\le \arccos\tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{2\cos\theta}\le r\le 2\}.$$

che è un insieme normale rispetto a θ. Quindi

$$\int_F \frac{y}{x^2+y^2}\,dx\,dy=\int_0^{\arccos\frac14}\left[\int_{\frac{1}{2\cos\theta}}^{2}\frac{r\sin\theta}{r^2}\,r\,dr\right]d\theta=$$

$$=\int_0^{\arccos\frac14}\left[2\sin\theta-\frac12\,\mathrm{tg}\,\theta\right]d\theta=\left[-2\cos\theta+\frac12\ln\cos\theta\right]_0^{\arccos\frac14}=$$

$$=-\frac{2}{4}+2+\frac12\ln\frac14-\frac12\ln 1=\frac32-\ln 2.$$

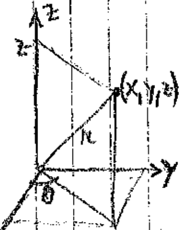
(3) Calcoliamo $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ con questo trucco:

$$\left[\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right]^2=\left[\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right]\left[\int_0^\infty e^{-y^2}dy\right]=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy=\text{(in coordinate polari)}$$

$$=\int_0^\infty\left[\int_0^{\pi/2}e^{-r^2}\,r\,d\theta\right]dr=\frac{\pi}{2}\int_0^\infty re^{-r^2}dr=\frac{\pi}{4}\left[-e^{-r^2}\right]_0^\infty=\frac{\pi}{4},$$

quindi

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2},\qquad \int_{\mathbb{R}}e^{-x^2}dx=2\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}.$$



<u>Coordinate cilindriche in $\mathbb{R}^3$</u>. Per $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ poniamo

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\\ z=z\end{cases}\qquad r\ge 0,\ \theta\in[0,2\pi],\ z\in\mathbb{R};$$

$$J_g(r,\theta,z)=\det\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta & 0\\ \sin\theta & r\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=r.$$

In analogia col caso precedente, vale la seguente

Proposizione Se f è integrabile su $F\in \mathcal{M}_3$, posto $g^{-1}(F)=E$, si ha

$$\int_F f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_E f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, r\,dr\,d\theta\,dz .$$

<u>Esempi</u>: (1) Solidi di rotazione: se $D\subseteq\{(x,y,z): y=0,\ x\geq 0\}\in\mathcal{M}_2$, ed F è il ruotato di D attorno all'asse z, si ha

$$F=\{(x,y,z):\ (\sqrt{x^2+y^2}, 0, z)\in D\} = g(E),$$

ove

$$E=\{(r,\theta,z):\ (r,0,z)\in D,\ \theta\in[0,2\pi]\}.$$

Quindi

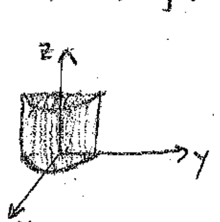
$$m_3(F)=\int_E r\,dr\,d\theta\,dz = \int_D\int_0^{2\pi} r\,d\theta\,dr\,dz = 2\pi\int_D r\,dr\,dz .$$

Quindi si integra "per circonferenze" passanti in punti $(r,z)\in D$.
Se poi $D=\{(x,z):\ 0\leq z\leq A,\ 0\leq x\leq f(z)\}$, con f continua e non negativa, si ritrova

$$m_3(F)=2\pi\int_D r\,dr\,dz = 2\pi\int_D x\,dx\,dz = 2\pi\int_0^A\int_0^{f(z)} x\,dx\,dz = \pi\int_0^a f(z)^2\,dz .$$

(2) $\displaystyle\int_F z(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$, $\quad F=\{(x,y,z):\ x^2+y^2\leq 1,\ x\geq 0,\ z\in[0,1]\}$.

Si ha $E=g^{-1}(F)=\{(r,\theta,z): 0\leq r\leq 1,\ |\theta|\leq\frac{\pi}{2},\ 0\leq z\leq 1\}$.



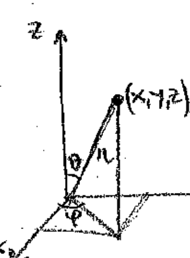
Quindi

$$\int_F z(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^1 z r^3\,dr\,d\theta\,dz =$$

$$= \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^1\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 \pi = \frac{\pi}{8}.$$

<u>Coordinate sferiche in $\mathbb{R}^3$</u> Per $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ poniamo

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad r\geq 0,\ \theta\in[0,\pi],\ \varphi\in[0,2\pi].$$



Qui

$$J_g(r,\theta,\varphi) = \det\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \cos\theta\left[r^2\cos\theta\sin\theta\right] + r\sin\theta\left[r\sin^2\theta\right] = r^2\sin\theta .$$

Si ha:

Proposizione Se $F\in\mathcal{M}_3$ e f è integrabile su F, allora detto $E = g^{-1}(F)$ si ha

$$\int_F f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_E f(r\sin\theta\cos\varphi,\, r\sin\theta\sin\varphi,\, r\cos\theta)\, r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi .$$

Esempi (1) $\int_F (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$, $F=\{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2\le 1,\ 0\le z\le\sqrt{x^2+y^2}\}$

Si ha $E = g^{-1}(F) = \{(r,\theta,\varphi):\ 0\le r\le 1,\ 0\le\cos\theta\le\sin\theta,\ \varphi\in[0,2\pi]\} =$

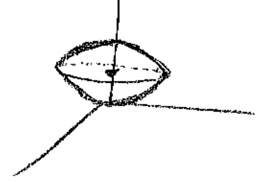
$$= [0,1]\times\left[\tfrac{\pi}{4},\tfrac{\pi}{2}\right]\times[0,2\pi],$$

da cui

$$\int_F (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} r^2\cdot r^2\sin\theta\,d\varphi\,d\theta\,dr =$$

$$= 2\pi\int_0^1 r^4\,dr\cdot\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sin\theta\,d\theta = \frac{2}{5}\pi\cdot\left[-\cos\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{5}\pi .$$

(2) $\int_F y^2 z\,dx\,dy\,dz$, $F=\{x^2+y^2+z^2\le\min\{1,2z\}\}$.



Al di sopra della quota $z=\frac{1}{2}$, F è la calotta sferica $x^2+y^2+z^2\le 1$, $z\ge\frac{1}{2}$; al di sotto di tale quota, F è la calotta sferica $x^2+y^2+(z-1)^2\le 1$, $z\le\frac{1}{2}$. Qui convengono piuttosto le coordinate cilindriche:

$$F = g(E),\quad E=\left\{(r,\theta,z):\ r\le\tfrac{\sqrt{3}}{2},\ \theta\in[0,2\pi],\ z\in\left[1-\sqrt{1-r^2},\ \sqrt{1-r^2}\right]\right\}.$$

Quindi

$$\int_F y^2 z\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\int_{1-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} r^2\sin^2\theta\; z\; r\,dz\,dr\,d\theta = \ldots\ldots$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin^2\theta \, d\theta \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{r^3}{2}\left[(1-r^2)-(1-\sqrt{1-r^2})^2\right] dr =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} r^3\left[\cancel{1-r^2} - 1 - (\cancel{1-r^2}) + 2\sqrt{1-r^2}\right] dr = \quad [r^2=t]$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac34}\left[-\frac{t}{2} + t\sqrt{1-t}\right] dt = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac34}\left[-\frac{t}{2} + (t-1+1)\sqrt{1-t}\right] dt =$$

$$= \frac{\pi}{8}\left[-t^2\right]_0^{\frac34} - \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac34}(1-t)^{3/2}\, dt + \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac34}\sqrt{1-t}\, dt =$$

$$= -\frac{9}{128}\pi + \frac{\pi}{2}\left[\frac{(1-t)^{5/2}}{5/2}\right]_0^{\frac34} - \frac{\pi}{2}\left[\frac{(1-t)^{3/2}}{3/2}\right]_0^{\frac34} = \pi\left[-\frac{9}{128} + \frac{1}{5\cdot 32} - \frac{1}{5} - \frac{1}{3\cdot 8} + \frac{1}{3}\right] =$$

$$= \pi\left[-\frac{9}{128} - \frac{31}{160} + \frac{7}{24}\right] = \pi\left[\frac{47}{480} - \frac{9}{128}\right] = \pi\,\frac{188-135}{1920} = \frac{53}{1920}\pi .$$

Si potevano anche utilizzare le coordinate sferiche, però con l'accortezza di spezzare F in due parti simmetriche, tagliandolo col piano $z=\frac12$: l'intersezione è il disco $\{z=\frac12,\ x^2+y^2=\frac34\}$, che ovviamente ha misura nulla in $\mathbb{R}^3$.
La parte soprastante F^+ è descritta in coordinate sferiche da

$$\varphi\in[0,2\pi],\quad \theta\in\left[0,\tfrac{\pi}{3}\right],\quad r\in\left[\tfrac{1}{2\cos\theta},1\right];$$

quella inferiore F^- è meglio descritta in coordinate sferiche centrate in $(0,0,1)$: cioè $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = 1 + r\cos\theta \end{cases}$. Si ha allora per F^-

$$\varphi\in[0,2\pi],\quad \theta\in\left[\tfrac{2}{3}\pi,\pi\right],\quad r\in\left[-\tfrac{1}{2\cos\theta},1\right] \quad (\text{si noti che } \cos\theta<0).$$

Perciò

$$\int_F y^2 z\, dx\,dy\,dz = \int_{F^+} y^2 z\, dx\,dy\,dz + \int_{F^-} y^2 z\, dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_{\frac{1}{2\cos\theta}}^1 (r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi)(r\cos\theta)\, r^2\sin\theta\, dr\,d\theta\,d\varphi +$$

$$+ \int_0^{2\pi}\int_{\frac23\pi}^{\pi}\int_{-\frac{1}{2\cos\theta}}^1 (r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi)(r\cos\theta+1)\, r^2\sin\theta\, dr\,d\theta\,d\varphi .$$

Se nel secondo integrale poniamo $\alpha=\pi-\theta$, troviamo

$$\int_F y^2 z\, dx\,dy\,dz = \cancel{\pi\int_0^{\pi/3}\sin^3\theta\cos\theta\int_{\frac{1}{2\cos\theta}}^1 r^5\, dr\, d\theta} + \cancel{\pi\int_0^{\pi/3}\sin^3\alpha(-\cos\alpha)\int_{\frac{1}{2\cos\alpha}}^1 r^5\, dr\, d\theta} + \pi\int_0^{\pi/3}\sin^3\alpha\int_{\frac{1}{2\cos\alpha}}^1 r^4\, dr\, d\alpha =$$

$$= \frac{\pi}{5}\int_0^{\pi/3}(1-\cos^2\alpha)\left[1-\frac{1}{32\cos^5\alpha}\right]\sin\alpha\, d\alpha = \frac{\pi}{5}\int_{1/2}^1\left[1-t^2-\frac{1}{32t^5}+\frac{1}{32t^3}\right] dt =$$

$$= \frac{\pi}{5}\left[\frac12 - \frac13\left(1-\frac18\right)\right] - \frac{\pi}{160}\left[-\frac14(1-16)+\frac12(1-4)\right] = \frac{\pi}{5}\left(\frac12-\frac{7}{24}\right) - \frac{\pi}{160}\left(\frac{15}{4}-\frac32\right) =$$

$$= \frac{\pi}{24} - \frac{3\pi}{128} + \frac{3\pi}{320} = \pi\,\frac{80-45+18}{1920} = \pi\,\frac{53}{1920}.$$