

Alcune tipologie di esercizi importanti:

A) sugli insiemi di notazioni sia $D = \{(x,z) : x \in [0,A], 0 \leq z \leq f(x)\}$, con $f: [0,A] \rightarrow \mathbb{R}$ continua e non negativa. Possiamo ruotare D attorno all'asse z , oppure attorno all'asse x . Nel primo caso, usando coordinate cilindriche di asse l'asse z , abbiamo ottenuto per il risultato E di D le formule

$$m_3(E) = 2\pi \int_D x \, dx \, dz$$

da cui

$$m_3(E) = 2\pi \int_0^A \int_0^{f(x)} x \, dz \, dx = 2\pi \int_0^A x f(x) \, dx;$$

nel secondo caso, utilizzando la formula

$$m_3(E) = \int_0^A m_2(E_x) \, dx,$$

si ha, essendo E_x il disco di centro $(x,0,0)$ e raggio $f(x)$ perpendicolare all'asse x ,

$$m_3(E) = \pi \int_0^A f(x)^2 \, dx.$$

B) Valutazione della convergenza di certi integrali dipendenti da parametri: per quali $\alpha > 0$ sono convergenti gli integrali (nel piano)

$$\int_{x^2+y^2 \leq 1} [\sqrt{x^2+y^2}]^{-\alpha} \, dx \, dy, \quad \int_{x^2+y^2 \geq 1} [\sqrt{x^2+y^2}]^{-\alpha} \, dx \, dy? \quad \text{E cosa succede in } \mathbb{R}^3?$$

• Se $x^2+y^2 \leq 1$, con le coordinate polari $\int_{x^2+y^2 \leq 1} [\sqrt{x^2+y^2}]^{-\alpha} \, dx \, dy = 2\pi \int_0^1 r^{-\alpha} r \, dr < \infty$ se

e solo se $1-\alpha > -1$, ossia $\alpha < 2$.

• Se $x^2+y^2 \geq 1$, $\int_{x^2+y^2 \geq 1} [\sqrt{x^2+y^2}]^{-\alpha} \, dx \, dy = 2\pi \int_1^{\infty} r^{-\alpha} r \, dr < \infty$ se e solo se $1-\alpha < -1$, ossia $\alpha > 2$.

• In \mathbb{R}^3 , se $x^2+y^2+z^2 \leq 1$, con le coordinate sferiche si ha

$$\int_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} [\sqrt{x^2+y^2+z^2}]^{-\alpha} \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 2\pi \int_0^{\pi} \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} \pi^{-\alpha+2} \, d\phi = 4\pi \int_0^1 r^{-\alpha+2} \, dr < \infty \Leftrightarrow -\alpha+2 > -1,$$

cioè $\alpha < 3$. Analogamente, $\int_{x^2+y^2+z^2 \geq 1} [\sqrt{x^2+y^2+z^2}]^{-\alpha} \, dx \, dy \, dz < \infty \Leftrightarrow \alpha > 3$.

RICHIAMI SULLE CURVE

Una curva in \mathbb{R}^N è una applicazione $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^N$, continua, ove I è un intervallo di \mathbb{R} (possibilmente illimitato). Le N equazioni:

$$x = \varphi(t), \quad t \in I$$

costituiscono la parametrizzazione parametrica della curva; l'insieme $\Gamma = \varphi(I)$ è il sostegno della curva, ovvero l'immagine di φ . Quello che davvero conta, in effetti, è il sostegno Γ più che la curva come applicazione: nella pratica si assegna Γ , e se ne dovrà cercare una parametrizzazione, ossia una curva φ che abbia Γ come sostegno.

Tutte le curve hanno un verso di percorrenza: quello indotto dalle t crescenti. Le orientazioni possibili per una curva sono ovviamente solo due.

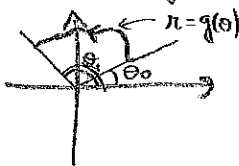
Esempi (1) Se $x_0, v \in \mathbb{R}^N$ le equazioni $x = x_0 + tv$, $t \in \mathbb{R}$, descrivono la retta per x_0 parallela al vettore v . Il verso è quello di v ; il verso opposto si ottiene scambiando t con $-t$.

(2) Il sistema $\begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}$, $\theta \in [0, 2\pi]$ descrive la circonferenza di centro $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ e raggio 1; l'orientazione è quella antioraria. Il verso orario si ottiene sostituendo $2\pi - \theta$ al posto di θ , oppure scrivendo $\begin{cases} x = \sin \theta \\ y = \cos \theta \end{cases}$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

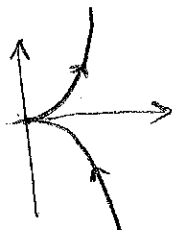
(3) (curve cartesiane). Il grafico di una funzione continua $g: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ è sostegno della curva $\begin{cases} x = x \\ y = g(x) \end{cases}$, $x \in [a,b]$.

(4) (curve in coordinate polari). L'equazione polare $r = g(\theta)$, con $g: [\theta_0, \theta_1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, descrive la curva piana

$$\begin{cases} x = g(\theta) \cos \theta \\ y = g(\theta) \sin \theta \end{cases}, \quad \theta \in [\theta_0, \theta_1].$$



(5) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, descrive per $t \geq 0$ il grafico della funzione $y = x^{3/2}$, e per $t < 0$ il grafico di $y = -x^{3/2}$.

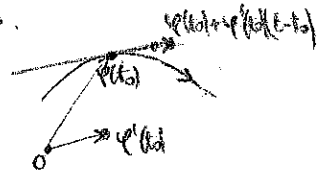


Se la curva è di classe C^1 , il vettore $\varphi'(t)$, se non nullo, è tangente a Γ nel punto $\varphi(t)$. Infatti, per la formula di Taylor, fissato $t \in I$ si ha

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \varphi'(t_0)(t-t_0) + o(t-t_0) \text{ per } t \rightarrow t_0,$$

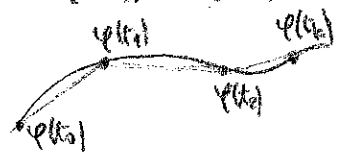
quindi la retta $X = \varphi(t_0) + \varphi'(t_0)(t-t_0)$ passa per $\varphi(t_0)$ ed è una approssimazione di $\varphi(t)$ di ordine superiore a $t-t_0$.

Il vettore $T = \frac{\varphi'(t_0)}{|\varphi'(t_0)|}$ è il versore tangente alla curva nel punto $\varphi(t_0)$.



La lunghezza di una curva si definisce così. Si fissa una partizione σ di I mediante i punti $\inf I \leq t_0 < t_1 < \dots < t_k \leq \sup I$, e si considera la lunghezza della spezzata che unisce i punti $\varphi(t_0), \dots, \varphi(t_k)$:

$$L_\sigma := \sum_{j=1}^k |\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})|$$



Dopo di che si osserva che aumentando i nodi t_j , la quantità L_σ cresce: non solo, date due partizioni σ_1, σ_2 della σ la partizione formata coi nodi di σ_1 e σ_2 si ha sempre

$$L_{\sigma_1} \leq L_\sigma, \quad L_{\sigma_2} \leq L_\sigma.$$

È dunque naturale definire la lunghezza di Γ come

$$L(\Gamma) = \sup_\sigma L_\sigma.$$

Non è una definizione molto comoda; tuttavia se la curva φ è di classe C^1 c'è un modo alternativo per calcolare $L(\Gamma)$.

Teorema Sia $\varphi \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$. Allora

$$L(\Gamma) = \int_I |\varphi'(t)| dt.$$

dim. Per ogni partizione σ di I

(4)

$$L_{\sigma} = \sum_{j=1}^k |\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})|_N = \sum_{j=1}^k \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \varphi'(t) dt \right|_N \leq \otimes \text{dim dop.} \\ \leq \sum_{j=1}^k \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\varphi'(t)|_N dt \leq \int_I |\varphi'(t)|_N dt,$$

da cui, passando all'estremo superiore su σ ,

$$L(\Gamma) \leq \int_I |\varphi'(t)|_N dt$$

Poniamo l'altra disuguaglianza. Sia $\varepsilon > 0$ e se I non è limitato sia $[a, b] \subset I$. Poichè φ' è uniformemente continua in $[a, b]$, esiste $\delta > 0$ tale che

$$t, s \in [a, b], |t-s| \leq \delta \Rightarrow |\varphi'(t) - \varphi'(s)|_N \leq \varepsilon/2.$$

Fissiamo una partizione $\sigma = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b\}$ tale che $|t_j - t_{j-1}| \leq \delta$ per $j=1, \dots, k$. Allora

$$\begin{aligned} \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\varphi'(t)|_N dt &\leq \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\varphi'(t) - \varphi'(t_{j-1})|_N dt + |\varphi'(t_{j-1})|_N (t_j - t_{j-1}) = \\ &= \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\varphi'(t) - \varphi'(t_{j-1})|_N dt + |\varphi'(t_{j-1})|_N (t_j - t_{j-1}) = \\ &= \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\varphi'(t) - \varphi'(t_{j-1})|_N dt + \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} [\varphi'(t_{j-1}) - \varphi'(t) + \varphi'(t)] dt \right| \leq \\ &\leq 2 \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\varphi'(t) - \varphi'(t_{j-1})|_N dt + \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \varphi'(t) dt \right| \leq \\ &\leq 2 \frac{\varepsilon}{2} (t_j - t_{j-1}) + |\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})|. \end{aligned}$$

Sommando su j ,

$$\int_a^b |\varphi'(t)|_N dt \leq \varepsilon(b-a) + L_{\sigma} \leq \varepsilon(b-a) + L(\Gamma),$$

e poichè ε è arbitrario,

$$\int_a^b |\varphi'(t)|_N dt \leq e(r).$$

Poiché $[a,b] \subseteq I$ è arbitrario, si deduce

$$\int_I |\varphi'(t)|_N dt \leq e(I).0$$

⊛ Dimostriamo che se $h: I \rightarrow \mathbb{R}^N$ è continua, allora

$$\left| \int_c^d R(t) dt \right|_N \leq \int_c^d |R(t)|_N dt.$$

Sia $y \in \mathbb{R}^N$; si ha

$$\left\langle \int_c^d R(t) dt, y \right\rangle_N = \sum_{i=1}^N \int_c^d R_i(t) dt y_i = \int_c^d \sum_{i=1}^N R_i(t) y_i dt = \int_c^d \langle R(t), y \rangle_N dt;$$

per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, cioè il fatto che $|\langle x, y \rangle_N| \leq |x|_N |y|_N \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N$, otteniamo

$$\left\langle \int_c^d R(t) dt, y \right\rangle_N \leq \int_c^d |R(t)|_N |y|_N dt = \int_c^d |R(t)|_N dt \cdot |y|_N \quad \forall y \in \mathbb{R}^N.$$

Scegliendo $y = \int_c^d R(t) dt$, troviamo

$$\left| \int_c^d R(t) dt \right|_N^2 \leq \int_c^d |R(t)|_N dt \cdot \left| \int_c^d R(t) dt \right|_N,$$

e semplificando si ha ⊛.