ANALISI 2 | Lu 20/4/15

Esercizio 1

Calcolare la lunghezza delle seguenti curve:

(i) (parabola) $x=t$, $y=t^2$; $t\in[-a,a]$;

(ii) (parabola semicubica) $x=t^2$, $y=t^3$, $|t|\le 2$;

(iii) (astroide) $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$, $t\in[0,2\pi]$;

(iv) (cicloide) $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$, $t\in[0,2\pi]$.

Integrali curvilinei

Sia $f: A\to\mathbb{R}$ una funzione continua, con A aperto di $\mathbb{R}^N$. Se Γ è una curva contenuta in A, parametrizzata da $x=\varphi(t)$, $t\in[a,b]$, con $\varphi\in C^1$, l'integrale curvilineo di f su Γ è il numero

$$\int_\Gamma f\,ds := \int_a^b f(\varphi(t))\,\|\varphi'(t)\|_N\,dt.$$

Si noti che

$$\int_\Gamma 1\,ds = \ell(\Gamma),$$

e che l'integrale curvilineo ha le usuali proprietà di linearità e monotonia; in particolare, $|\int_\Gamma f\,ds|\le\int_\Gamma |f|\,ds$. Naturalmente, come gli integrali ordinari in una variabile, $\int_\Gamma f\,ds$ non dipende dall'orientazione di Γ.

Esercizio 2

Calcolare i seguenti integrali curvilinei:

(i) $\int_\Gamma x\,ds$, $\Gamma=[0,1]\times\{0\}$.

(ii) $\int_\Gamma e^{x-y}\,ds$, $\Gamma=\{(x,y): |x|+|y|=1\}$.

(iii) $\int_\Gamma \sqrt{x^2+y^2}\,ds$, $\Gamma=\{x=e^t\cos t,\ y=e^t\sin t,\ t\in[0,2\pi]\}$.

Integrali curvilinei orientati

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto, e sia $F: A \to \mathbb{R}^N$: la funzione detta campo vettoriale. Poniamo

$$\int_{+\Gamma} F \cdot dx := \int_{+\Gamma} (F_1\, dx_1 + \dots + F_N\, dx_N) := \int_{\Gamma} \langle F, T \rangle_N\, ds.$$

Questo integrale è detto "integrale del campo F lungo la curva (orientata) Γ; esso dipende dall'orientazione, perchè coincide con un integrale non orientato in cui però compare il versore tangente T. Il simbolo $+\Gamma$ sta a indicare un'orientazione prescelta come positiva, che va di volta in volta specificata, e T è il corrispondente versore tangente. Se si cambia orientazione, T diventa $-T$, e l'integrale cambia segno.

Esempio: Sia Γ la curva cartesiana $\{y = x^2, |x| \le 1\}$, orientata secondo le x crescenti. Sia $F(x,y) = (x^2, xy)$. Si ha

$$\varphi(x) = (x, x^2), \quad \varphi'(x) = (1, 2x), \quad T = \left(\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}, \frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}}\right), \quad ds = \sqrt{1+4x^2}\, dx$$

e quindi

$$\int_{+\Gamma} F \cdot dx = \int_{+\Gamma} (x^2\, dx + xy\, dy) = \int_{-1}^{1} \langle (x^2, x^3), T \rangle_2\, ds =$$

$$= \int_{-1}^{1} (x^2 + 2x^4)\, dx = 2\int_0^1 (x^2 + 2x^4)\, dx = \frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{22}{15}.$$

Osservazione Come nell'esempio precedente, si ha in generale

$$\int_{\Gamma} F \cdot dx = \int_I \langle F(\varphi(t)), \frac{\varphi'(t)}{\cancel{|\varphi'(t)|_N}} \rangle_N \cancel{|\varphi'(t)|_N}\, dt =$$

$$= \int_I \langle F(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle_N\, dt.$$

In pratica, l'integrando $\sum_{i=1}^N F_i\, dx_i$ diventa $\sum_{i=1}^N F_i(\varphi(t))\varphi_i'(t)$ e non c'è bisogno di calcolare $|\varphi'(t)|_N$.

Esercizio 3

Calcolare i seguenti integrali curvilinei orientati:

(i) $\int_{+\Gamma} [xy\,dx + (y^2+1)\,dy]$, Γ = segmento da $(0,0)$ a $(1,1)$;

(ii) $\int_{+\Gamma} [x^2\,dx + xy^2\,dy]$, $+\Gamma = \partial([0,1]\times[0,1])$ con verso antiorario;

(iii) $\int_{+\Gamma} [(x-z)\,dx + (1-xy)\,dy + y\,dz]$, $+\Gamma = \{(t,t^2,t^3) : t\in[0,1]\}$ col verso delle t crescenti;

(iv) $\int_{+\Gamma} (x^2+y^2+z^2)(dx+dy+dz)$, $+\Gamma = \{(\cos t, \sin t, t) : t\in[0,\pi/2]\}$, verso delle t crescenti;

(v) $\int_{-\Gamma} (e^z\,dx + e^x\,dy + e^y\,dz)$, $+\Gamma = \{(1,t,e^t) : t\in[0,1]\}$ con $+\gamma$.

Formule di Gauss-Green nel piano

Prima di tutto una definizione ulteriore.

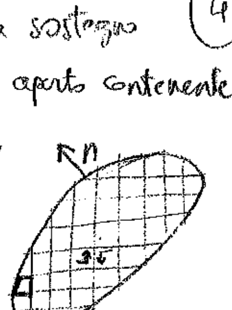
Definizione Una curva $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ è di classe C^1 a tratti se:

(i) è continua,

(ii) esiste una partizione $a=t_0<t_1<\dots<t_k=b$ tale che $\varphi_i := \varphi|_{[t_{i-1},t_i]}$ è una curva di classe C^1 per ogni $i=1,\dots,k$.

Ad esempio, i poligoni di $\mathbb{R}^2$ sono sostegno di curve C^1 a tratti.
Se $E=\{(x,y) : a\le x\le b,\ \alpha(x)\le y\le \beta(x)\}$ con $\alpha,\beta\in C^1[a,b]$, e $\alpha\le\beta$, allora ∂E (la frontiera di E) è sostegno di una curva C^1 a tratti.

Teo Sia A un aperto limitato di $\mathbb{R}^2$, tale che ∂A sia sostegno di una curva di classe C^1 a tratti. Se $f \in C^1(B)$, con B aperto contenente $\bar{A}$, si ha, posto $n = (n_x, n_y)$ = versore normale esterno a Ω;



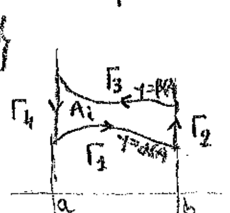
$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x}\, dx dy = \int_{\partial A} f n_x \, ds = \int_{+\partial A} f \, dy,$$

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial y}\, dx dy = \int_{\partial A} f n_y \, ds = \int_{-\partial A} f \, dx.$$

dim Reticolando A in modo sufficientemente fitto, ci possiamo ridurre ad un numero finito di insiemi A_i normali rispetto all'asse x oppure all'asse y (o ad entrambi), definiti da grafici di funzioni C^1.
L'integrale doppio è additivo rispetto agli A_i; gli integrali curvilinei sono pure additivi, perché i pezzi di frontiera interni ad A sono percorsi due volte con versi opposti.
Ci riduciamo quindi al caso di un singolo A_i, ad esempio della forma

$$A_i = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ a \le x \le b, \ \alpha(x) \le y \le \beta(x)\}$$

con $\alpha \le \beta$ e $\alpha, \beta \in C^1[a,b]$. Si ha



$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x}\, dx dy = \int_a^b \left[\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x}\, dy \right] dx.$$

Poiché $\displaystyle \frac{d}{dx} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\, dy = f(x,\beta(x))\,\beta'(x) - f(x,\alpha(x))\,\alpha'(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\, dy$

(si tratta di derivare la funzione composta $F(\alpha(x),\beta(x),x)$ con $F(u,v,x) = \int_u^v f(x,y)\,dy$), possiamo scrivere

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x}\, dx dy = \int_a^b \left\{ \frac{d}{dx} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy - f(x,\beta(x))\,\beta'(x) + f(x,\alpha(x))\,\alpha'(x) \right\} dx =$$

$$= \left[\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy\right]_a^b + \int_a^b \left[-f(x,\beta(x))\,\beta'(x) + f(x,\alpha(x))\,\alpha'(x)\right]dx =$$

$$= \int_{\alpha(b)}^{\beta(b)} f(b,y)\,dy - \int_{\alpha(a)}^{\beta(a)} f(a,y)\,dy - \int_a^b f(x,\beta(x))\,\beta'(x)\,dx + \int_a^b f(x,\alpha(x))\,\alpha'(x)\,dx .$$

D'altra parte

$$\int_{\partial A} f n_x\, ds = \sum_{i=1}^{4} \int_{\Gamma_i} f n_x\, ds,$$

ove

$t=(t_x,t_y)=(1,\alpha'(x))$

$n=(t_y,-t_x)$

$$\Gamma_1: \begin{cases} x=x \\ y=\alpha(x), \end{cases} \quad x\in[a,b], \quad n_x=\frac{\alpha'(x)}{\sqrt{1+\alpha'(x)^2}}, \quad ds=\sqrt{1+\alpha'(x)^2}\,dx$$

$$\Gamma_2: \begin{cases} x=b \\ y=y \end{cases} \quad y\in[\alpha(b),\beta(b)] \quad n_x=1, \quad ds=dy$$

$$\Gamma_3: \begin{cases} x=x \\ y=\beta(x), \end{cases} \quad x\in[a,b], \quad n_x=\frac{-\beta'(x)}{\sqrt{1+\beta'(x)^2}}, \quad ds=\sqrt{1+\beta'(x)^2}\,dx$$

$$\Gamma_4: \begin{cases} x=a \\ y=y, \end{cases} \quad y\in[\alpha(a),\beta(a)] \quad n_x=-1, \quad ds=-dy$$

Quindi

$$\int_{\partial A} f n_x\, ds = \int_a^b f(x,\alpha(x))\,\alpha'(x)\,dx + \int_{\alpha(b)}^{\beta(b)} f(b,y)\,dy -$$

$$-\int_a^b f(x,\beta(x))\,\beta'(x)\,dx + \int_{\alpha(a)}^{\beta(a)} f(a,y)\,dy = \int_A \frac{\partial f}{\partial x}\,dx\,dy .$$

La seconda formula si prova analogamente ma più facilmente (gli integrali su Γ_2 e Γ_4 sono nulli). □

Vediamo tre conseguenze importanti.

<u>Corollario 1</u> (teorema della divergenza in $\mathbb{R}^2$): sia A un aperto limitato di $\mathbb{R}^2$ con ∂A sostegno di una curva di classe C^1 a tratti. Se $F: B \to \mathbb{R}^2$ è un campo vettoriale di classe C^1, con B aperto $\supset \overline{A}$, allora

$$\int_A \operatorname{div} F \, dx\, dy = \int_{\partial A} \langle F, n \rangle_2 \, ds,$$

ove $\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}$ è la divergenza del campo F e n è il versore normale esterno ad A!

<u>dim</u> Basta sommare le due formule di Gauss-Green. □

<u>Corollario 2</u> (area di insiemi piani). Se $A \subset \mathbb{R}^2$ è un aperto limitato, con frontiera sostegno di una curva di classe C^1 a tratti, allora

$$m_2(A) = \int_{+\partial A} x\, dy = \int_{-\partial A} y\, dx = \frac{1}{2} \int_{+\partial A} [x\,dy - y\,dx].$$

<u>dim</u> Basta scegliere $f(x,y) = x$ e $f(x,y) = y$ nelle formule di Gauss-Green. □

<u>Corollario 3</u> (integrazione per parti) Se $A \subset \mathbb{R}^2$ è un aperto limitato con frontiera sostegno di una curva di classe C^1 a tratti, e se $f, g \in C^1(B)$ con B aperto contenente $\overline{A}$, allora

$$\int_A D_i f \cdot g \, dx\,dy = \int_{\partial A} f g\, n_i\, ds - \int_A f\, D_i g \, dx\,dy, \quad i = 1,2,$$

ove $n = (n_1, n_2)$ è il versore normale esterno ad A.

<u>dim</u> Basta osservare che

$$\int_A D_i(fg)\, dx\,dy = \int_{\partial A} f g\, n_i\, ds, \quad i = 1,2. \ \square$$

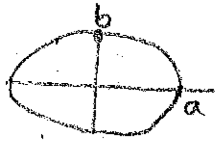
Esempi: (1) calcoliamo l'area della regione E delimitata dalla ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a,b>0)$. Si ha la parametrizzazione

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, \quad t\in[0,2\pi],$$

da cui

$$m_2(E)=\frac{1}{2}\int_{+\partial E}[x\,dy - y\,dx] = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[a\cos t\,(b\sin t) - b\sin t\,(-a\sin t)]\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\,dt = \pi ab.$$



2) Sia E la regione delimitata dalla curva Γ, espressa in coordinate polari $r=g(\theta)$, $c\le\theta\le d$, con $0\le c<d\le 2\pi$, e dagli assi polari $\theta=c$, $\theta=d$. Si ha

$$m_2(E)=\int_{+\partial E}\frac{1}{2}[x\,dy - y\,dx] =$$

$$=\int_c^d \left[g(\theta)\cos\theta\left[\cancel{g'(\theta)\sin\theta}+g(\theta)\cos\theta\right] - g(\theta)\sin\theta\left[\cancel{g'(\theta)\cos\theta} - g(\theta)\sin\theta\right]\right]d\theta +$$

$$+\int_{\theta=c}\frac{1}{2}[x\,dy - y\,dx] - \int_{\theta=d}\frac{1}{2}[x\,dy - y\,dx] =$$

$$=\int_c^d \frac{1}{2}g(\theta)^2\,d\theta + \int_0^{g(c)}\frac{1}{2}\left[\cancel{r\cos c\,[\sin c] - r\sin c\,[\cos c]}\right]dr =$$

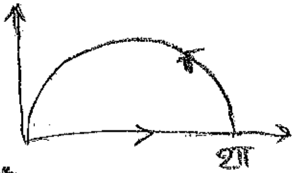
$$=\frac{1}{2}\int_c^d g(\theta)^2\,d\theta,$$

come già sapevamo, perché in coordinate polari si ha più facilmente

$$m_2(E)=\int_c^d\int_0^{g(\theta)} r\,dr\,d\theta = \int_c^d \frac{g(\theta)^2}{2}\,d\theta.$$

(3) Calcoliamo l'area della regione E delimitata dalla cicloide $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $t \in [0, 2\pi]$, e dall'asse x.

Poiché sul segmento $y = 0$, $x = x$, $x \in [0, 2\pi]$, risulta $x\,dy - y\,dx = 0$, si ha



$$m_2(E) = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left\{[t - \sin t][\sin t] - [1 - \cos t][1 - \cos t]\right\} dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [t \sin t - \sin^2 t - 1 + 2\cos t - \cos^2 t]\, dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [t \sin t - 2 + 2\cos t]\, dt =$$

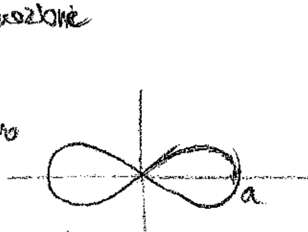
$$= \frac{1}{2}[t \cos t]_0^{2\pi} - \cancel{\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos t\, dt} + 2\pi - 0 =$$

$$= \pi + 2\pi \quad 3\pi.$$

(4) La <u>lemniscata di Bernoulli</u> è la curva piana di equazione

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), \quad \text{con } a > 0;$$

in coordinate polari si ha $r^4 = r^2 a^2 \cos 2\theta$, ovvero



$$r^2 = a^2 \cos 2\theta.$$

Dunque $\cos 2\theta \geq 0$, ossia $\theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi\right]$; quindi

$$r = a\sqrt{\cos 2\theta}.$$

La regione racchiusa dalla curva è formata da due parti fra loro simmetriche. L'area della prima (corrispondente a $\theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$) è data da

$$m_2(E_1) = \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} a^2 \cos 2\theta\, d\theta = a^2\left[\frac{\sin 2\theta}{4}\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{2}.$$