ANALISI 2 | Ma 21/4/15

Superfici in $\mathbb{R}^3$

Una superficie in $\mathbb{R}^3$ è una applicazione $\sigma: T \to \mathbb{R}^3$, ove $T \subseteq \mathbb{R}^2$ è un sottoinsieme tale che $A \subseteq T \subseteq \bar{A}$, con A aperto di $\mathbb{R}^2$; la σ si suppone sempre di classe C^1, con $D\sigma$ (matrice 3×2) di rango massimo in ogni punto di A. Sia Σ l'immagine di σ (la superficie vera e propria). Si parla in questo caso di superficie regolare.

Poichè $D\sigma(u,v)$ ha rango massimo per ogni $(u,v) \in A$, in ciascuno di questi punti i vettori $\sigma_u(u,v)$ e $\sigma_v(u,v)$ (le derivate parziali di $\sigma(u,v)$) sono linearmente indipendenti e tangenti a Σ nel punto $\sigma(u,v)$.

Ne segue che Σ ha piano tangente in $\sigma(u,v)$, di equazioni parametriche

$$x = \sigma(u,v) + s\,\sigma_u(u,v) + t\,\sigma_v(u,v), \qquad (s,t) \in \mathbb{R}^2.$$

Dato che $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$, vi è anche la retta normale a Σ per (u,v) che ha la direzione del vettore $\sigma_u(u,v) \times \sigma_v(u,v)$ (il prodotto vettoriale fra i due).

Richiamo sul prodotto vettoriale

Dati $a, b \in \mathbb{R}^3$, il prodotto vettoriale $a \times b$ è quel vettore $w \in \mathbb{R}^3$ tale che:

(i) $|w|_3 = |a|_3 |b|_3 \sin\theta$, ove θ è l'angolo fra a e b ($\theta \in [0,\pi]$);

(ii) $w \perp a$, $w \perp b$;

(iii) $\det(a|b|w) > 0$.

Le tre condizioni identificano modulo, direzione e verso di $a\times b$; quindi lo individuano univocamente e si può dimostrare che, necessariamente, se $a = (a_1, a_2, a_3)$ e $b = (b_1, b_2, b_3)$ allora $a \times b = (a_2 b_3 - a_3 b_2,\ a_3 b_1 - a_1 b_3,\ a_1 b_2 - a_2 b_1)$.

Un' utile regola mnemonica è

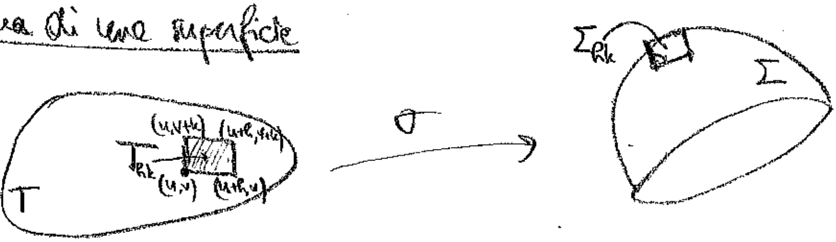
$$a \times b = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}, \text{ ove } i,j,k \text{ sono i versori degli assi } x,y,z.$$

Si noti che le coordinate di $\sigma_u \times \sigma_v$ sono (com'è giusto) i tre minori della matrice $D\sigma$.

Da tutto ciò segue che le equazioni parametriche della retta normale a Σ in $\sigma(u,v)$ sono

$$x = \sigma(u,v) + t\, \sigma_u(u,v) \times \sigma_v(u,v), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Area di una superficie



Dato un rettangolo $T_{hk} = [u,u+h] \times [v,v+k]$, sia Σ_{hk} il parallelogramma di vertice $\sigma(u,v)$, generato da $h\sigma_u(u,v)$ e $k\sigma_v(u,v)$: la sua area è $hk|\sigma_u|_3|\sigma_v|_3 \sin\theta = hk|\sigma_u \times \sigma_v|_3$.

Ricoprendo T con un numero finito di T_{hk}, la somma delle aree dei Σ_{hk} è una quantità che approssima (come facile conseguenza della formula di Taylor per $\sigma(u,v)$) l'integrale su T di $|\sigma_u \times \sigma_v|_3$. Ne deriva la definizione seguente:

Definizione Nelle ipotesi precedenti, l'area della superficie Σ è il numero

$$a(\Sigma) = \int_T |\sigma_u \times \sigma_v|_3 \, du\, dv.$$

Osservazione: posto $E = |\sigma_u|_3^2$, $G = |\sigma_v|_3^2$, $F = \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle_3$, si ha:

$$|\sigma_u \times \sigma_v|_3 = \sqrt{EG - F^2}.$$

Infatti

$$|\sigma_u \times \sigma_v|_3 = |\sigma_u|_3 |\sigma_v|_3 \sin\theta = |\sigma_u|_3 |\sigma_v|_3 \sqrt{1-\cos^2\theta} =$$

$$= \sqrt{|\sigma_u|_3^2 |\sigma_v|_3^2 \left[1-\cos^2\theta\right]} = \sqrt{|\sigma_u|_3^2 |\sigma_v|_3^2 - (\langle \sigma_u, \sigma_v \rangle_3)^2} =$$

$$= \sqrt{EG-F^2}.$$

Esempi. (1) Sia σ la superficie sferica di raggio r e centro l'origine:

$$\sigma : \begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}, \qquad \theta \in [0,\pi],\ \varphi \in [0,2\pi].$$

Si ha

$$D\sigma = \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

e dunque

$$E = r^2, \quad G = r^2\sin^2\theta, \quad F = 0, \quad \sqrt{EG-F^2} = r^2\sin\theta.$$

Perciò

$$a(\Sigma) = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta \, d\varphi \, d\theta = 4\pi r^2.$$

(2) (Superfici di rotazione) Sia $\gamma : [a,b] \to \Gamma \subset \mathbb{R}^2$ una curva di classe C^1 contenuta nel piano xz. Ruotando Γ attorno all'asse z otteniamo la superficie

$$\sigma : \begin{cases} x = \alpha(t)\cos\theta \\ y = \alpha(t)\sin\theta, \\ z = \beta(t) \end{cases} \quad \begin{matrix} \theta \in [0,2\pi] \\ t \in [a,b] \end{matrix} \qquad \text{ove } \gamma(t) = \begin{cases} x = \alpha(t) \\ z = \beta(t) \end{cases}, \ t \in [a,b].$$

Si ha

$$D\sigma = \begin{pmatrix} \alpha'(t)\cos\theta & -\alpha(t)\sin\theta \\ \alpha'(t)\sin\theta & \alpha(t)\cos\theta \\ \beta'(t) & 0 \end{pmatrix},$$

e quindi $E = \alpha'(t)^2 + \beta'(t)^2$, $G = \alpha(t)^2$, $F = 0$,

da cui
$$\sqrt{EG-F^2} = \alpha(t)\sqrt{\alpha'(t)^2+\beta'(t)^2}$$
e pertanto
$$a(\Sigma) = \int_a^b \int_0^{2\pi} \alpha\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2}\, d\theta\, dt = 2\pi \int_\Gamma x\, ds .$$
Ad esempio, l'area della superficie del toro
$$\sigma : \begin{cases} x = (R + r\cos\varphi)\cos\theta \\ y = (R + r\cos\varphi)\sin\theta \\ z = r\sin\varphi \end{cases} \qquad \theta,\varphi \in [0,2\pi]$$
è data da
$$a(\Sigma) = 2\pi \int_0^{2\pi} (R + r\cancel{\cos\varphi})\, r\, d\varphi = 2\pi R \cdot 2\pi r .$$

(3) (Superfici cartesiane): sia $f : \bar{A} \to \mathbb{R}$ continua, tale che $f \in C^1(A)$. Allora il grafico di f è una superficie regolare:
$$\sigma : \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x,y) \end{cases} \qquad (x,y) \in \bar{A} .$$
Si ha
$$D\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_x & f_y \end{pmatrix}, \quad E = 1 + f_x^2,\ G = 1 + f_y^2,\ F = f_x f_y,$$
da cui
$$\sqrt{EG-F^2} = \sqrt{(1+f_x^2)(1+f_y^2) - f_x^2 f_y^2} = \sqrt{1+f_x^2+f_y^2},$$
e
$$a(\Sigma) = \int_A \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\, dx\, dy .$$
Ad esempio, sia $f(x,y) = x^2 - y^2$; se $A = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 1\}$ si ha

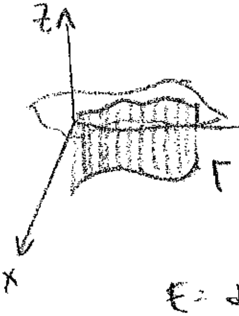
$f_x = 2x,\ f_y = 2y,$

$$a(\Sigma) = \int_A \sqrt{1+4x^2+4y^2}\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1+4r^2}\; r\, dr\, d\theta = \qquad 4r^2 = t$$

$$= \frac{1}{8}\, 2\pi \int_0^4 \sqrt{1+t}\, dt = \frac{\pi}{4}\,\frac{2}{3}\left[(1+t)^{3/2}\right]_0^4 = \frac{\pi}{6}(5^{3/2}-1).$$

(4) Sia Γ una curva regolare del piano xy, $x=\alpha(t)$, $y=\beta(t)$, $t\in[a,b]$. Sia $f:A\to\mathbb{R}$ una funzione continua definita su un aperto $A\supset\Gamma$; supponiamo $f\geq 0$. Sia Σ la superficie



$$\sigma: \begin{cases} x = \alpha(t) \\ y = \beta(t) \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{array}{l} t\in[a,b], \\ \\ 0\leq z\leq f(\alpha(t),\beta(t)). \end{array}$$

Si ha $\quad D\sigma = \begin{pmatrix} \alpha'(t) & 0 \\ \beta'(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, quindi

$$E = \alpha'(t)^2+\beta'(t)^2,\quad G=1,\quad F=0$$

da cui

$$a(\Sigma) = \int_a^b \int_0^{f(\alpha(t),\beta(t))} \sqrt{1+\alpha'(t)^2+\beta'(t)^2}\, dz\, dt = \int_a^b f(\alpha(t),\beta(t))\sqrt{1+\alpha'(t)^2+\beta'(t)^2}\, dt = \int_\Gamma f\, ds.$$

<u>Integrali superficiali</u> Sia $A\subseteq\mathbb{R}^3$ un aperto, sia $f:A\to\mathbb{R}$ una funzione continua, sia $\Sigma=\sigma(T)$ una superficie regolare contenuta in A. L'integrale di f su Σ è definito così:

$$\int_\Sigma f\, d\sigma := \int_T f(\sigma(u,v))\,|\sigma_u\wedge\sigma_v|_3\, du\, dv.$$

Si noti che $\int_\Sigma 1\, d\sigma = a(\Sigma)$. Valgono le usuali proprietà (linearità, monotonia) -

Se poi $F : A \to \mathbb{R}^3$ è un campo vettoriale continuo, si può definire (6)
il flusso del campo F attraverso la superficie Σ come l'integrale $\int_\Sigma \langle F, n\rangle_3 \, d\sigma$. Si vede che

$$\int_\Sigma \langle F, n\rangle_3 \, d\sigma = \int_T \langle F(\sigma(u,v)), \sigma_u \times \sigma_v(u,v)\rangle_3 \, du\, dv.$$

Esempi (1) Calcoliamo

$$\int_\Sigma x^2 y \, d\sigma, \quad \Sigma = \text{triangolo di vertici } (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1).$$

Detto $D = \{(x,y) : 0 \le x \le 1, \, 0 \le y \le 1-x\}$, si ha

$$\Sigma : \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 1-x-y, \end{cases} \quad (x,y) \in D.$$

La superficie è cartesiana, con $f(x,y) = 1-x-y$. Quindi

$$|\sigma_x \times \sigma_y|_3 = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3},$$

e pertanto

$$\int_\Sigma x^2 y \, d\sigma = \int_D x^2 y \sqrt{3} \, dx\, dy = \int_0^1 x^2 \int_0^{1-x} \sqrt{3}\, y \, dy \, dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{2} x^2 (1-x)^2 \, dx = \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^1 (x^2 - 2x^3 + x^4) \, dx = \frac{\sqrt{3}}{60}.$$

(2) Posto $F = (x, y, 0)$, calcoliamo il flusso di F attraverso la superficie sferica $x^2+y^2+z^2 = r^2$, scegliendo l'orientazione indotta dalla normale esterna. Si ha allora $n = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right)$, e quindi, usando le coordinate sferiche,

$$\int_\Sigma \langle F, n\rangle_3 \, d\sigma = \int_\Sigma \left(\frac{x^2+y^2}{r^2}\right) d\sigma = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^2\theta \cdot r^2 \sin\theta \, d\varphi \, d\theta =$$

$$= 2\pi r^2 \int_0^\pi \sin^3\theta \, d\theta = 2\pi r^2 \int_0^\pi \sin\theta (1-\cos^2\theta) \, d\theta =$$

$$= 2\pi r^2 \int_{-1}^1 (1-t^2) \, dt = \frac{8}{3}\pi r^2.$$