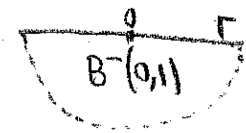
Formula di Stokes

Sia $\Sigma = \sigma(T) \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare, orientata, con bordo. Una superficie orientata in $\mathbb{R}^3$ significa che è possibile scegliere un verso del versore normale e ottenere che $n(x,y,z)$ è continuo su Σ (se la superficie non è orientabile, ciò non è possibile). Una superficie con bordo significa invece il fatto seguente. Poniamo

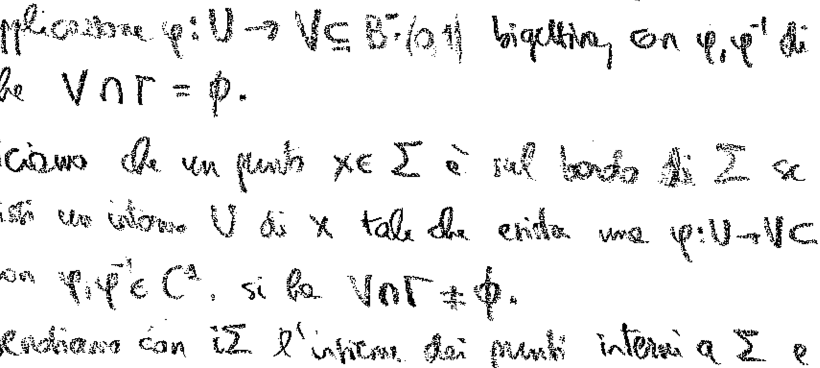
$$B^-(0,1) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2+v^2 < 1,\ v \leq 0\}$$
$$\Gamma = \{(u,v) \in B^-(0,1) : v = 0\}.$$



Diciamo che un punto $x \in \Sigma$ è interno a Σ se esistono un intorno U di x (cioè l'intersezione con Σ di una palla $B(x,r) \subset \mathbb{R}^3$) ed una applicazione $\varphi : U \to V \subseteq B^-(0,1)$ bigettiva, con φ, φ^{-1} di classe C^1, tali che $V \cap \Gamma = \emptyset$.

Diciamo che un punto $x \in \Sigma$ è sul bordo di Σ se comunque si fissi un intorno U di x tale che esista una $\varphi : U \to V \subset B^-(0,1)$ bigettiva con $\varphi, \varphi^{-1} \in C^1$, si ha $V \cap \Gamma \neq \emptyset$.

Denotiamo con $i\Sigma$ l'insieme dei punti interni a Σ e con $b\Sigma$ l'insieme dei punti sul bordo di Σ. Si noti che $b\Sigma$ non è la frontiera topologica di Σ: infatti Σ come insieme di $\mathbb{R}^3$ coincide con la propria frontiera.



Se Σ è orientata e con bordo, è possibile orientare $b\Sigma$ in modo coerente
con Σ nel modo seguente. Sia $x \in b\Sigma$: vi è un'unica direzione tangente a Σ e normale a $b\Sigma$; scegliamo il versore v che ha tale direzione e verso uscente da Σ.

Il versore t tangente a $b\Sigma$ ha orientazione coerente con quella di Σ, indotta da n, se $\det(v|t|n) = 1$. In pratica, le orientazioni di $b\Sigma$ e di Σ sono coerenti se un osservatore, eretto nel verso di n, che percorre $b\Sigma$ nel verso di t, si trova la superficie Σ a sinistra.

<u>Teorema</u> (Formula di Stokes) Sia $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare, orientata, con bordo $b\Sigma$ orientato in modo coerente. Se A è un aperto di $\mathbb{R}^3$ contenente Σ, e $F : A \to \mathbb{R}^3$ è un campo vettoriale di classe C^1, allora vale la formula seguente:

$$\int_\Sigma \langle \operatorname{rot} F, n \rangle_3 \, d\sigma = \int_{b\Sigma} \langle F, t \rangle_3 \, ds,$$

ove $\operatorname{rot} F$ è il vettore definito così: se $F = (M, N, P)$,

$$\operatorname{rot} F = \begin{pmatrix} P_y - N_z \\ M_z - P_x \\ N_x - M_y \end{pmatrix} \quad \left[\text{Trucco mnemonico: } \operatorname{rot} F = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ D_x & D_y & D_z \\ M & N & P \end{pmatrix}\right].$$

<u>dim.</u> Faremo la dimostrazione in un caso particolare ma frequente:

$\Sigma = \sigma(T)$, $T = \overline{A}$, $i\Sigma = \sigma(A)$, $b\Sigma = \sigma(\partial A)$, <u>$\sigma$ di classe C^2</u>.

Più in dettaglio, supponiamo che $\partial A = \gamma([a,b])$, con $\gamma(t)$ curva regolare; dunque $b\Sigma = \sigma(\gamma([a,b]))$; sia τ il versore tangente a ∂A orientato con la t coerente.

Calcoliamo $\int_{b\Sigma} \langle F, t\rangle_3 \, ds$:

$$\int_{b\Sigma} \langle F, t\rangle_3 \, ds = \int_a^b \langle F(\sigma(\gamma(t))), (\sigma\circ\gamma)'(t)\rangle_3 \, dt = \int_a^b \langle F(\sigma\circ\gamma), [D\sigma\circ\gamma]\,\gamma'\rangle_3 \, dt =$$

$$= \int_a^b \langle [D\sigma\circ\gamma]^t F(\sigma\circ\gamma), \gamma'\rangle_2 \, dt = \int_{\partial A} \langle (D\sigma)^t F\circ\sigma, \tau\rangle_2 \, ds .$$

Se ν è il versore normale esterno a ∂A, si ha $\nu_1 = \tau_2$, $\nu_2 = -\tau_1$, ovvero

$$\nu = R\tau, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi, essendo $R^{-1} = R^t$,

$$\int_{b\Sigma} \langle F, t\rangle_3 \, ds = \int_{\partial A} \langle (D\sigma)^t F\circ\sigma, \tau\rangle_2 \, ds = \int_{\partial A} \langle (D\sigma)^t F\circ\sigma, R^{-1}\nu\rangle_2 \, ds =$$

$$= \int_{\partial A} \langle R(D\sigma)^t F\circ\sigma, \nu\rangle_2 \, ds = \text{[applicando su } A \text{ il teorema della divergenza]}$$

$$= \int_A \operatorname{div}\left[R(D\sigma)^t F\circ\sigma\right] du\, dv.$$

Vediamo manipolare l'integrando $\operatorname{div}\left[R(D\sigma)^t F\circ\sigma\right]$: scrivendo $\sigma = (x, y, z)$, si ha

$$\operatorname{div}\left[R(D\sigma)^t (F\circ\sigma)\right] = \operatorname{div}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M\circ\sigma \\ N\circ\sigma \\ P\circ\sigma \end{pmatrix}\right] = \operatorname{div}\left[\begin{pmatrix} x_v & y_v & z_v \\ -x_u & -y_u & -z_u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M\circ\sigma \\ N\circ\sigma \\ P\circ\sigma \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial u}\langle \sigma_v, F\circ\sigma\rangle_3 - \frac{\partial}{\partial v}\langle \sigma_u, F\circ\sigma\rangle_3 =$$

$$= \cancel{\langle \sigma_{uv}, F\circ\sigma\rangle_3} + \langle \sigma_v, (DF\circ\sigma)\sigma_u\rangle - \cancel{\langle \sigma_{vu}, F\circ\sigma\rangle_3} - \langle \sigma_u, (DF\circ\sigma)\sigma_v\rangle_3 =$$

$$= \langle [(DF\circ\sigma) - (DF\circ\sigma)^t]\,\sigma_u, \sigma_v\rangle_3 .$$

Ma

$$DF - DF^t = \begin{pmatrix} M_x & M_y & M_z \\ N_x & N_y & N_z \\ P_x & P_y & P_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} M_x & N_x & P_x \\ M_y & N_y & P_y \\ M_z & N_z & P_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & M_y - N_x & M_z - P_x \\ N_x - M_y & 0 & N_z - P_y \\ P_x - M_z & P_y - N_z & 0 \end{pmatrix},$$

e quindi

$$\operatorname{div}\left[R(D\sigma)^t F\circ\sigma\right] = \langle [DF\circ\sigma - (DF\circ\sigma)^t]\,\sigma_u, \sigma_v\rangle_3 = \left\langle \begin{pmatrix} [(M_y - N_x)\circ\sigma]\, y_u + [(M_z - P_x)\circ\sigma]\, z_u \\ [(N_x - M_y)\circ\sigma]\, x_u + [(N_z - P_y)\circ\sigma]\, z_u \\ [(P_x - M_z)\circ\sigma]\, x_u + [(P_y - N_z)\circ\sigma]\, y_u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}\right\rangle_3 =$$

$= [(N_x - M_y)\circ\sigma][x_u y_v - x_v y_u] + [(M_z - P_x)\circ\sigma][z_u x_v - z_v x_u] + [(P_y - N_z)\circ\sigma][y_u z_v - y_v z_u] =$

$= \langle (\mathrm{rot}\, F)\circ\sigma, \sigma_u \times \sigma_v \rangle_3$

Perciò

$$\int_{b\Sigma} \langle F, t\rangle_3 \, ds = \int_A \mathrm{div}\,[R(\theta\circ\sigma)^t\, F\circ\sigma]\, du\, dv =$$

$$= \int_A \langle \mathrm{rot}\, F\circ\sigma, \sigma_u \times \sigma_v \rangle_3 \, du\, dv = \int_\Sigma \langle \mathrm{rot}\, F, n\rangle_3 \, d\sigma . \quad \square$$

Esempi:

(1) Calcoliamo $\int_{+C} [(y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz]$, $C = \{x^2+y^2+z^2 = 1,\ x+y+z=0\}$, $+C$ = orientazione tale che $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$. Si noti che C è un cerchio massimo, bordo del disco $D = \{x^2+y^2+z^2 \le 1,\ x+y+z=0\}$. Usando la formula di Stokes, essendo

$$\mathrm{rot}\begin{pmatrix}y+z\\z+x\\x+y\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} i & j & k\\ D_x & D_y & D_z \\ y+z & z+x & x+y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-1\\1-1\\1-1\end{pmatrix} = 0,$$

l'integrale proposto è nullo.

(2) Calcoliamo il flusso del rotore di $F = (y+xz,\ 2x+2yz,\ 3x+4xy)$ attraverso la superficie $\Sigma = \{x^2+y^2+z^2=1,\ z \ge 0\}$ con n tale che $n_3 \ge 0$. Si ha

$$\int_\Sigma \langle \mathrm{rot} F, n\rangle_3 \, d\sigma = \int_{b\Sigma} \langle F, t\rangle_3 \, ds, \text{ ove } b\Sigma: \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \\ z = 0\end{cases} \text{ e } t = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$$

(poiché $n_3 \ge 0$, la superficie resta a sinistra di chi percorre $b\Sigma$ nel verso di t).

Perciò $\int_\Sigma \langle \mathrm{rot} F, n\rangle_3\, d\sigma = \int_0^{2\pi} (\sin\theta\cdot(-\sin\theta) + 2\cos\theta(\cos\theta) + 0)\, d\theta = -\pi + 2\pi = \pi.$

fine, citiamo, senza dimostrarlo, il seguente teorema della divergenza in $\mathbb{R}^3$. (5)
Sia A un aperto limitato di $\mathbb{R}^3$, con ∂A sostegno di una superficie Σ regolare a tratti (cioè: $\Sigma = \sigma(T)$, con $T = \bigcup_{i=1}^{\ell} T_i$, e $\sigma|_{T_i}$ è una superficie regolare; quindi potrebbe essere la frontiera di un poliedro). Sia $f: A \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1. Si ha allora

$$\int_A \operatorname{div} f \, dx\,dy\,dz = \int_{\partial A} \langle f, n \rangle_3 \, d\sigma,$$

ove, naturalmente,

$$\operatorname{div} f = (f_1)_x + (f_2)_y + (f_3)_z$$

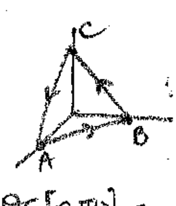
Vale la pena di osservare che in realtà il teorema della divergenza vale in ogni dimensione, solo che a secondo membro compare l'integrale su una varietà $(n-1)$-dimensionale.

Esercizi

1. Calcolare $\int_{+C} [(y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz]$, $C = \{x^2+y^2=1,\ x+z=1\}$, orientata in modo da lasciare $e_3 = (0,0,1)$ a sinistra.

2. Calcolare $\int_{+\Gamma} [y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz]$ ove $\Gamma = A \to B \to C \to A$, $A = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

3. Calcolare l'area dell'insieme piano delimitato dalla cardioide $r = a(1+\cos\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$.



4. Calcolare l'area della regione del 1° quadrante, delimitata dalle due "spire" della spirale di Archimede $r = \theta$, $\theta \in [0, \pi/2]$ e $\theta \in [2\pi, 2\pi + \pi/2]$.

5. Calcolare l'area di un "petalo" della rosa a 3 foglie $r = \sin 3\theta$.

6. Calcolare $\int_A xy \, dx\,dy$, ove A = regione delimitata dall'astroide $x = \cos^3\theta$, $y = \sin^3\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$.