ANALISI 2 | Lu 27/4/15

GLI SPAZI $L^1(E)$, $L^2(E)$

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ misurabile. Definiamo

$$\mathcal{L}^1(E) = \{ f : E \to \overline{\mathbb{R}} : f \text{ è misurabile e } \int_E |f| dx < \infty \}$$

$$\mathcal{L}^2(E) = \{ f : E \to \overline{\mathbb{R}} : f \text{ è misurabile e } \int_E |f|^2 dx < \infty \}.$$

Osservazione Se $m_N(E) < \infty$, allora $\mathcal{L}^2(E) \subset \mathcal{L}^1(E)$: infatti se $f \in \mathcal{L}^2(E)$

$$\int_E |f| dx = \frac{1}{2} \int_E 2|f| dx \leq \frac{1}{2} \left[\int_E |f|^2 dx + \int_E 1 \, dx \right] = \frac{1}{2} \left[\int_E |f|^2 dx + m_N(E) \right] < \infty,$$

mentre l'inclusione opposta è in generale falsa: ad esempio, se $N=1$ ed $E =]0,1[$, la funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ sta in $\mathcal{L}^1(E)$ ma non in $\mathcal{L}^2(E)$.

Se poi $m_N(E) = +\infty$, nessuna delle due inclusioni è vera: se $N=1$ ed $E =]0,\infty[$, allora $\frac{1}{\sqrt{x}} I_{]0,1[}(x) \in \mathcal{L}^1(0,\infty) \setminus \mathcal{L}^2(0,\infty)$, mentre $\frac{1}{x} I_{]1,\infty[}(x) \in \mathcal{L}^2(0,\infty) \setminus \mathcal{L}^1(0,\infty)$.

Definizione Per f, g funzioni misurabili su $E \in \mathcal{M}_N$ poniamo

$$f \simeq g \iff m_N\{x \in E : f(x) \neq g(x)\} = 0.$$

Quindi $f \simeq g$ se e solo se $f = g$ q.o.

Questa è una relazione di equivalenza, cioè è riflessiva ($f \simeq f$ per ogni f), simmetrica (se $f \simeq g$ allora $g \simeq f$) e transitiva (se $f \simeq g$ e $g \simeq h$, allora $f \simeq h$).

Indichiamo con $L^1(E)$ e con $L^2(E)$ gli spazi quoziente di $\mathcal{L}^1(E)$ e $\mathcal{L}^2(E)$ rispetto alla relazione $\simeq$: gli elementi di $L^1(E)$ sono classi di equivalenza di funzioni sommabili, gli elementi di $L^2(E)$ sono classi di equivalenza di funzioni di quadrato sommabile.

Osservazione Le quantità

$$\|f\|_{L^1(E)} := \int_E |f|\,dx, \quad \|f\|_{L^2(E)} := \left[\int_E |f|^2 dx\right]^{1/2}$$

sono indipendenti dalle singole funzioni, ma dipendono invece dalla classe di equivalenza di essa: in altre parole,

$$f \simeq g \Rightarrow \|f\|_{L^1(E)} = \|g\|_{L^1(E)} \quad \forall f,g \in \mathcal{L}^1(E),$$
$$f \simeq g \Rightarrow \|f\|_{L^2(E)} = \|g\|_{L^2(E)} \quad \forall f,g \in \mathcal{L}^2(E).$$

Osservazione $\|f\|_{L^1(E)} = \int_E |f|\,dx$ è una norma su $L^1(E)$; $\|f\|_{L^2(E)} = \sqrt{\int_E |f|^2 dx}$ è una norma su $L^2(E)$. Inoltre $\|f\|_{L^2(E)}$ è indotta dal prodotto scalare

$$\langle f,g\rangle_{L^2(E)} = \int_E fg\,dx.$$

Teorema Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ misurabile. Allora:

(i) $(L^1(E), \|\cdot\|_{L^1(E)})$ è uno spazio di Banach.

(ii) $(L^2(E), \langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2(E)})$ è uno spazio di Hilbert.

dim. Dobbiamo dimostrare che $L^1(E)$ e $L^2(E)$ sono completi rispetto alla propria norma.

(i) Sia $\{\overline{f_n}\}$ una successione di Cauchy di elementi di $L^1(E)$ (con $\overline{f}$ si denota la classe di equivalenza cui appartiene f). Dunque, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n_ε tale che $\|\overline{f_n} - \overline{f_m}\|_{L^1(E)} < \varepsilon$ per ogni $n, m \geq n_\varepsilon$. Possiamo scegliere induttivamente, per ogni $k \in \mathbb{N}$, delle scelte $n_k > n_{k-1}$ per cui $\|\overline{f_n} - \overline{f_m}\|_{L^1(E)} < 2^{-k-1}$ per $n, m \geq n_k$; in particolare, quindi, $\|\overline{f_{n_{k+1}}} - \overline{f_{n_k}}\|_{L^1(E)} < 2^{-k-1}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Consideriamo la successione di funzioni

$$g_m = |f_{n_0}| + \sum_{k=1}^{m} |f_{n_k} - f_{n_{k-1}}|, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Le g_m sono misurabili, non negative e $g_m \leq g_{m+1}$. Quindi esse convergono puntualmente per $m \to \infty$ alla funzione

$$g = |f_{n_0}| + \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_k} - f_{n_{k-1}}| ,$$

e per il teorema di B. Levi

$$\int_E g_m \, dx \longrightarrow \int_E g \, dx = \int_E |f_{n_0}| dx + \sum_{k=1}^{\infty} \int_E |f_{n_k} - f_{n_{k-1}}| dx =$$

$$= \|\tilde{f}_{n_0}\|_{L^1(E)} + \sum_{k=1}^{\infty} \|\tilde{f}_{n_k} - \tilde{f}_{n_{k-1}}\|_{L^1(E)} \le \|\tilde{f}_{n_0}\|_{L^1(E)} + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k+1} < \infty .$$

Pertanto g è sommabile, e in particolare g è finita q.o., ossia la serie $f_{n_0} + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_k} - f_{n_{k-1}})$ converge assolutamente q.o., e dunque converge q.o.. Sia f la somma di questa serie; si tratta di una funzione misurabile e

$$f(x) = \lim_{m \to \infty} \left[f_{n_0}(x) + \sum_{k=1}^{m} [f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x)] \right] = \lim_{m \to \infty} f_{n_m}(x) \quad \text{q.o.}$$

Si vede che

$$|f| \le |f_{n_0}| + \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_k} - f_{n_{k-1}}| = g , \quad |f_{n_m}| \le |f_{n_0}| + \sum_{k=1}^{m} |f_{n_k} - f_{n_{k-1}}| \le g ,$$

quindi f è sommabile e

$$f_{n_m} \to f \text{ q.o.}, \qquad |f_{n_m}| \le g \text{ q.o.}$$

da cui, per convergenza dominata,

$$\|\tilde{f}_{n_m} - \tilde{f}\|_{L^1(E)} = \int_E |f_{n_m} - f| dx \longrightarrow 0 .$$

Perciò la successione di Cauchy $\{\tilde{f}_n\}$ ha una sottosuccessione $\{\tilde{f}_{n_m}\}$ che converge in $L^1(E)$ a $\tilde{f}$. Ne segue che l'intera successione $\{\tilde{f}_n\}$ converge in $L^1(E)$ a $\tilde{f}$.
Ciò prova (i).

(ii) La dimostrazione è molto simile. Data $\{\tilde{f}_n\}$ di Cauchy in $L^2(E)$, si sceglie una sottosuccessione $\{\tilde{f}_{n_k}\}$ tale che $\|\tilde{f}_{n_{k+1}} - \tilde{f}_{n_k}\|_{L^2(E)} \le 2^{-k-1}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Poniamo, come prima,

$$g_m = |f_{n_0}| + \sum_{k=1}^{m} |f_{n_k} - f_{n_{k-1}}| , \quad g = |f_{n_0}| + \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_k} - f_{n_{k-1}}| .$$

Dalla relazione $g_m^2 \le g^2$ e dal lemma di Fatou segue

$$\max\lim_{m \to \infty} \left[\int_E |g_m|^2 dx \right]^{1/2} \le \left[\int_E |g|^2 dx \right]^{1/2} \le \min\lim_{m \to \infty} \left[\int_E |g_m|^2 dx \right]^{1/2} ,$$

ossia

$$\|\bar g\|_{L^2(E)} = \lim_{m\to\infty} \|g_m\|_{L^2(E)} \le \lim_{m\to\infty} \left[\|f_{n_0}\|_{L^2(E)} + \sum_{k=1}^{m} \|f_{n_k} - f_{n_{k-1}}\|_{L^2(E)} \right] \le \|f_{n_0}\|_{L^2(E)} + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} < \infty.$$ (4)

Dunque g^2 è sommabile e in particolare g^2 e g sono q.o. finite. Perciò la serie

$$f_{n_0}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x) \right)$$

converge assolutamente q.o. e dunque converge q.o. a una funzione misurabile f. Si ha d'altra parte

$$f_{n_0}(x) + \sum_{k=1}^{m} \left(f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x) \right) = f_{n_m}(x),$$

quindi $f_{n_m}(x) \to f(x)$ q.o. in E. Inoltre $|f| \le g$, quindi $f^2 \le g^2$ e f^2 è sommabile; poi per il lemma di Fatou si ha, per m fissato,

$$\|\bar g - \bar f_{n_m}\|_{L^2(E)} \le \min\lim_{p\to\infty} \|\bar f_{n_p} - \bar f_{n_m}\|_{L^2(E)} \le \min\lim_{p\to\infty} \sum_{k=m+1}^{p} \|f_{n_k} - f_{n_{k-1}}\|_{L^2(E)} \le \sum_{k=m+1}^{\infty} 2^{-k} = 2^{-m};$$

quindi $\bar f_{n_m} \to \bar f$ in $L^2(E)$ per $m \to \infty$.

Perciò, la successione di Cauchy $\{\bar f_n\}$ ha una sottosuccessione convergente in $L^2(E)$ a $\bar f$, e pertanto l'intera successione $\{\bar f_n\}$ converge in $L^2(E)$ a $\bar f$. Ciò prova (ii). □