Analisi Matematica II, Anno Accademico 2014-2015
Ingegneria Edile, Civile, Ambientale
Paolo Acquistapace, Vincenzo M. Tortorelli
Prova in itinere del 7 maggio 2015
Prima parte: soluzioni

Esercizio 1 Calcolare: (a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+t}\,\chi_{[n^2,n^3]}(t)$; (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{n^2}^{n^3} \frac{n}{n+t}\,dt$.

Risoluzione (a) Fissato $t \in \mathbb{R}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ per cui $n^2 > t$, ossia definitivamente, si ha $\frac{n}{n+t}\,\chi_{[n^2,n^3]}(t) = 0$. In particolare, fissato $t \in \mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+t}\,\chi_{[n^2,n^3]}(t) = 0.$$

(b) Si ha $\int_{n^2}^{n^3} \frac{n}{n+t}\,dt = [n\ln(n+t)]_{n^2}^{n^3} = n\ln\frac{n+n^3}{n+n^2} = n\ln n + \mathrm{o}(1)$ per $n \to \infty$. In particolare

$$\lim_{n\to\infty} \int_{n^2}^{n^3} \frac{n}{n+t}\,dt = +\infty.$$

Esercizio 2 Posto, per $n > 0$,

$$E_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{1}{n} \le x \le 2 - \frac{1}{n}, \ 0 \le y \le 1 - \frac{1}{1+nx}\right\},$$

determinare $\lim_{n\to\infty} m_2(E_n)$.

Risoluzione Poiché $\left[\frac{1}{n}, 2-\frac{1}{n}\right] \subset \left[\frac{1}{n+1}, 2-\frac{1}{n+1}\right]$ e $1 - \frac{1}{1+nx} \le 1 - \frac{1}{1+(n+1)x}$ per ogni $x > 0$, si ha $E_n \subset E_{n+1}$. Dalle proprietà della misura di Lebesgue segue subito

$$\lim_{n\to\infty} m_2(E_n) = m_2\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right);$$

ora, fissato $x > 0$ si ha $\lim_{n\to\infty}[1 - \frac{1}{1+nx}] = 1$ e pertanto l'unione degli E_n è $]0,2[\,\times[0,1[$. Quindi

$$\lim_{n\to\infty} m_2(E_n) = 2.$$

Esercizio 3 Si calcoli l'integrale $\displaystyle\int_E y\,e^x\,dxdy$, ove

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y^2 \le x \le y\}.$$

Risoluzione Dalla condizione $y^2 \le y$ si ottiene che $y \in [0;1]$, e il dominio è l'insieme normale rispetto all'asse y delimitato dai grafici delle funzioni $x = y^2$, $x = y$ per $y \in [0,1]$. Pertanto, per il teorema di Tonelli,

$$\begin{aligned}\int_E y\,e^x\,dxdy &= \int_0^1 y \int_{y^2}^{y} e^x\,dx\,dy = \int_0^1 y(e^y - e^{y^2})\,dy = \\ &= \int_0^1 ye^y\,dy - \int_0^1 ye^{y^2}\,dy = [ye^y - e^y]_0^1 - \left[\frac{1}{2}e^{y^2}\right]_0^1 = \frac{3}{2} - \frac{e}{2} = \frac{3-e}{2}.\end{aligned}$$

Nota: L'insieme E è anche normale rispetto all'asse x, ma in questo caso integrare prima rispetto alla variabile y e poi rispetto alla variabiel x sarebbe stato leggermente meno conveniente.

Esercizio 4 Si calcoli l'integrale $\displaystyle\int_F \frac{x}{x^2+y^2}\,dxdy$, ove

$$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le y \le x \le 1\}.$$

Risoluzione In coordinate polari il dominio di integrazione F è descritto da $0 \le r\sin\vartheta \le r\cos\vartheta \le 1$: quindi $0 \le \sin\vartheta \le \cos\vartheta$, cioè $\vartheta \in [0, \frac{\pi}{4}]$. D'altra parte $r\cos\vartheta = x \le 1$, cioè $r \le \frac{1}{\cos\vartheta}$. Pertanto cambiando coordinate si ha

$$\begin{aligned}\int_F \frac{x}{x^2+y^2}\,dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{1}{\cos\vartheta}} \frac{r\cos\vartheta}{r^2} r\,drd\vartheta = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} \cos\vartheta\,drd\vartheta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\vartheta \int_0^{\frac{1}{\cos\vartheta}} drd\vartheta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\vartheta = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Esercizio 5 Si calcoli l'integrale $\displaystyle\int_G \sin(xy)\,dxdy$, ove

$$G = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 < \frac{y}{x^2} < 2, \ 0 < xy < \pi\right\}.$$

Risoluzione Il dominio è descritto in modo semplice dalle grandezze

$$u = \frac{y}{x^2} \in]1,2[, \qquad v = xy \in]0,\pi[;$$

similmente l'integrando diventa $\sin v$. Non conviene qui calcolare direttamente lo Jacobiano $J(u,v)$, perché occorrerebbe determinare esplicitamente x e y in funzione di u e v: $x = x(u,v)$ e $y = y(u,v)$. È meglio invece scrivere $J(u,v)$ come reciproco di $J(x,y)$, ove

$$J(x,y) = \det\begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -\frac{2y}{x^3} & y \\ \frac{1}{x^2} & x \end{pmatrix} = -\frac{3y}{x^2};$$

quindi

$$|J(u,v)| = \frac{1}{|J(x,y)|} = \frac{x^2}{3y} = \frac{1}{3u}.$$

Pertanto con questo cambiamento di coordinate si ottiene

$$\begin{aligned}\int_G \sin(xy)\,dxdy &= \int_1^2 \int_0^\pi \sin v\,\frac{1}{3u}\,dvdu = \\ &= \int_1^2 \frac{1}{3u} \int_0^\pi \sin v\,dvdu = \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{1}{u}\,du \int_0^\pi \sin v\,dv = \frac{2}{3}\ln 2.\end{aligned}$$

Esercizio 6 Determinare il volume dell'insieme ottenuto ruotando il sottografico della funzione $z = e^{-x^2}$, $x \ge 0$, attorno all'asse z.

Risoluzione Il volume del solido di rotazione E che si ottiene ruotando attorno all'asse delle ordinate la porzione di piano tra l'asse delle ascisse ed il grafico di una funzione non negativa e misurabile f definita su $[0;+\infty[$, è dato (per integrazione in coordinate cilindriche) da:

$$2\pi \int_0^{+\infty} r f(r)\, dr,$$

Nel nostro caso si ha quindi, ponendo $t = r^2$,

$$m_3(E) = 2\pi \int_0 r e^{-r^2}\, dr = \pi \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = \pi.$$

Esercizio 7 Calcolare il flusso del campo vettoriale $F(x, y, z) = (0, 0, 1)$ attraverso la superficie $\sigma(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$, definita su $T = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 < v < \frac{1}{u}\}$.

Risoluzione L'immagine Σ di $\sigma : T to\mathbb{R}^3$ è una 2-varietà orientabile senza bordo: infatti σ è una funzione di classe C^1 con differenziale di rango massimo, ed inoltre essa ha, su Σ, inversa continua: $u = \sqrt{x^2 + y^2} \in]0, 1[\,$, $v = z \in]1, \frac{1}{u}[\,$. Pertanto il campo $(\sigma_u \times \sigma_v)(u, v) = (\sin v, -\cos v, u) = (\sin z, -\cos z, \sqrt{x^2 + y^2})$ non è mai nullo, ed è continuo rispetto alle coordinate $(x, y, z) \in \Sigma$. Se scegliamo come orientazione proprio quella determinata da questo campo normale, ha senso geometrico calcolare il flusso di F attraverso Σ, e si ha semplicemente

$$\int_\Sigma \langle F, n\rangle_3 d\sigma = \int_T \langle F(\sigma(u, v)), (\sigma_u \times \sigma_v)(u, v)\rangle_3\, dudv = \int_0^1 \int_1^{\frac{1}{u}} u\, dvdu = \frac{1}{2}\,.$$

Seconda parte: soluzioni

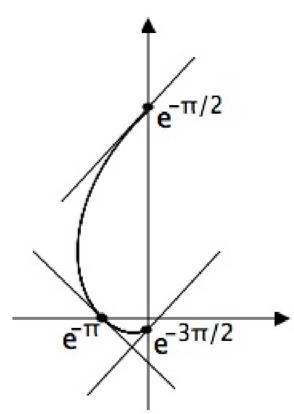
Esercizio 1 Sia Γ la curva del piano xz di equazione polare $r = e^{-\vartheta}$, $\vartheta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

(a) Disegnare la curva.

(b) Determinare l'area della regione piana delimitata da Γ e dall'asse z.

(c) Determinare l'area della superficie Σ ottenuta ruotando Γ attorno all'asse z.

Risoluzione (a) La curva è disegnata a fianco.



(b) Abbiamo a disposizione la formula

$$m_2(E) = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta g(\vartheta)^2\, d\vartheta$$

che fornisce l'area della regione piana delimitata dalla curva in coordinate polari $r = g(\vartheta)$ e dai semiassi polari $\vartheta = \alpha$ e $\vartheta = \beta$. Pertanto, detta E la regione delimitata da Γ e dall'asse z (che corrisponde all'unione dei semiassi $\vartheta = \pi/2$ e $\vartheta = 3\pi/2$),

$$m_2(E) = \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{-2\vartheta}\, d\vartheta = \frac{1}{4}\, e^{-\pi}(1 - e^{-2\pi}).$$

(c) La formula da applicare in questo caso è

$$a(\Sigma) = 2\pi \int_\Gamma x\, ds,$$

che significa integrare lungo la curva Γ le circonferenze descritte ruotando dai punti di Γ. Quindi

$$a(\Sigma) = 2\pi \int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{-\vartheta} \cos\vartheta \sqrt{x'(\vartheta)^2 + y'(\vartheta)^2}\, d\vartheta.$$

Poiché $x(\vartheta) = e^{-\vartheta}\cos\vartheta$, $y(\vartheta) = e^{-\vartheta}\sin\vartheta$, si ha

$$x'(\vartheta) = -e^{-\vartheta}\cos\vartheta - e^{-\vartheta}\sin\vartheta, \quad y'(\vartheta) = -e^{-\vartheta}\sin\vartheta + e^{-\vartheta}\cos\vartheta,$$

e dopo qualche cancellazione si ha

$$\sqrt{x'(\vartheta)^2 + y'(\vartheta)^2} = \sqrt{2}\, e^{-\vartheta}.$$

Pertanto

$$a(\Sigma) = 2\sqrt{2}\,\pi \int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{-2\vartheta} |\cos\vartheta|\, d\vartheta = -2\sqrt{2}\,\pi \int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{-2\vartheta} \cos\vartheta\, d\vartheta.$$

Dato che, integrando due volte per parti,

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{-2\vartheta} \cos\vartheta\, d\vartheta = -\frac{2}{5}\, e^{-3\pi},$$

si ottiene finalmente

$$a(\Sigma) = \frac{4}{5}\sqrt{2}\,\pi\, e^{-3\pi}.$$

Esercizio 2 Siano

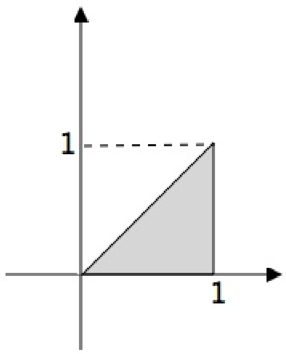
$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le y \le x \le 1\}, \qquad E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le y \le x^2 \le 2 - y^2\}.$$

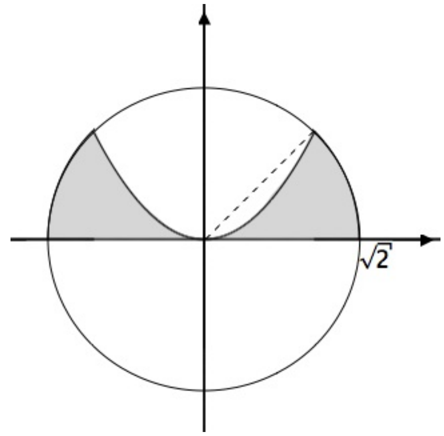
(a) Si disegnino i due insiemi, e si analizzi la sommabilità di $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ su ciascuno.

(b) Al variare di $\alpha \ge 0$ si analizzi la sommabilità di $f_\alpha(x,y) = \dfrac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}$ su E.

(c) Al variare di $\alpha \ge 0$ si analizzi la sommabilità di $g_\alpha(x,y) = \dfrac{1}{|x|^{2\alpha} + |y|^{2\alpha}}$ su E.

Risoluzione (a) I due insiemi sono disegnati qui sotto.





Passando in coordinate polari, l'insieme T è descritto da $0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{4}$, $0 \le r \le \frac{1}{\cos\vartheta}$; quindi

$$\int_T \frac{1}{x^2+y^2}\,dxdy = \int_0^{\pi/4}\int_0^{\frac{1}{\cos\vartheta}} \frac{1}{r^2}\,r\,drd\vartheta = \int_0^{\pi/4} [\ln r]_0^{\frac{1}{\cos\vartheta}}\,d\vartheta = +\infty.$$

Invece l'insieme E è descritto da $0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{4}$, $\frac{\sin\vartheta}{\cos^2\vartheta} \le r \le \sqrt{2}$; quindi

$$\begin{aligned}\int_E \frac{1}{x^2+y^2}\,dxdy &= \int_0^{\pi/4}\int_{\frac{\sin\vartheta}{\cos^2\vartheta}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{r^2}\,r\,drd\vartheta = \int_0^{\pi/4} [\ln r]_{\frac{\sin\vartheta}{\cos^2\vartheta}}^{\sqrt{2}}\,d\vartheta = \\ &= \int_0^{\pi/4}\left[\ln\sqrt{2} - \ln\frac{\sin\vartheta}{\cos^2\vartheta}\right]d\vartheta = \frac{\pi}{8}\,\ln 2 - \int_0^{\pi/4} \ln\frac{\sin\vartheta}{\cos^2\vartheta}\,d\vartheta.\end{aligned}$$

L'ultimo integrale è certamente finito perché $\cos^2\vartheta \ge \frac{1}{2}$, mentre $|\ln\sin\vartheta| \simeq |\ln\vartheta|$ per $\vartheta \simeq 0$, e d'altronde si sa che $\ln\vartheta$ è sommabile in $[0,a]$ per ogni $a > 0$.

(b) Procedendo come sopra otteniamo per $\alpha \ne 1$

$$\begin{aligned}\int_E \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}\,dxdy &= \int_0^{\pi/4}\int_{\frac{\sin\vartheta}{\cos^2\vartheta}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{r^{2\alpha}}\,r\,drd\vartheta = \frac{1}{2-2\alpha}\int_0^{\pi/4} [r^{2-2\alpha}]_{\frac{\sin\vartheta}{\cos^2\vartheta}}^{\sqrt{2}}\,d\vartheta = \\ &= \frac{1}{2-2\alpha}\int_0^{\pi/4}\left[2^{1-\alpha} - \left(\frac{\sin\vartheta}{\cos^2\vartheta}\right)^{2-2\alpha}\right]d\vartheta.\end{aligned}$$

Poiché $\cos^2\vartheta \ge \frac{1}{2}$, mentre $|\sin\vartheta| \simeq |\vartheta|$ per $\vartheta \simeq 0$, l'ultimo integrale converge se e solo se converge l'integrale

$$\int_0^{\pi/4} \vartheta^{2-2\alpha}\,d\vartheta,$$

il che, come è noto, avviene se e solo se $2-2\alpha > -1$, ossia $\alpha < \frac{3}{2}$.

(c) Osservando che risulta

$$|x|^{2\alpha} + |y|^{2\alpha} \le 2(x^2+y^2)^\alpha$$

e che

$$(x^2+y^2)^\alpha \le (2\max\{x^2,y^2\})^\alpha = 2^\alpha \max\{|x|^{2\alpha},|y|^{2\alpha}\} \le 2^\alpha(|x|^{2\alpha}+|y|^{2\alpha}),$$

l'integrale $\int_E \frac{1}{|x|^{2\alpha}+|y|^{2\alpha}}\,dxdy$ converge se e solo se $\alpha < \frac{3}{2}$.