ANALISI 2 | Lu 11/5/15 e Ma 12/5/15 (1)

SERIE DI FOURIER

Una serie trigonometrica è una serie della forma

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos nx+b_n\sin nx\right] \qquad (a_n, b_n\in\mathbb{R} \text{ o anche } \mathbb{C}).$$

Perché ha interesse studiarle? Perché ogni serie di potenze è di questo tipo: $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta} \Rightarrow$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left[c_n r^n\cos n\theta+i\, c_n r^n\sin n\theta\right]$$

e informazioni sulle serie di potenze forniscono informazioni sulle serie trigonometriche, e viceversa. Poi ci sono motivazioni fisiche: il suono emesso da un diapason è una oscillazione $a\sin(\omega t+\varphi)$, di ampiezza a, frequenza ω, fase φ. Il suono emesso da uno strumento è una sovrapposizione (quindi una somma) di onde di questo tipo; una chitarra produce somme di onde con frequenze multiple di una frequenza fondamentale:

$$\sum_{n=1}^{N} a_n\cos\frac{2\pi nt}{T} \quad \text{oppure} \quad \sum_{n=1}^{N} b_n\sin\frac{2\pi nt}{T}, \quad \text{ove } T=\frac{1}{\omega}.$$

La somma si arresta a N per fenomeni di smorzamento ma è teoricamente infinita.

La somma di una serie trigonometrica è ovviamente una funzione periodica di periodo T, ma se si fa l'omotetia $\tau=\frac{2\pi}{T}t$, le funzioni $t\mapsto v(t)$ che sono T-periodiche diventano funzioni $\tau\mapsto\tilde{v}(\tau)$ 2π-periodiche. Quindi consideriamo solo funzioni 2π-periodiche.

Notazione complessa Si ha

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta\right]=\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_k e^{ik\theta},$$

ove

$$c_0=\frac{a_0}{2},\quad c_k=\begin{cases}\dfrac{a_k-ib_k}{2} & (k>0)\\[2mm] \dfrac{a_{|k|}+ib_{|k|}}{2} & (k<0)\end{cases},$$

e viceversa $a_0=2c_0$, $a_n=c_n+c_{-n}$, $b_n=i(c_n-c_{-n})$.

Ortogonalità:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nt\cos mt\,dt=\begin{cases}2\pi & \text{se } n=m=0\\ \pi & \text{se } n=m>0\\ 0 & \text{se } n\neq m\end{cases},\qquad \int_{-\pi}^{\pi}\cos nt\sin mt\,dt=0\quad\forall m,n,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nt\sin mt\,dt=\begin{cases}\pi & \text{se } n=m>0\\ 0 & \text{se } n\neq m \text{ o } n=m=0\end{cases},\qquad \int_{-\pi}^{\pi}e^{ikt}e^{-iht}\,dt=\begin{cases}2\pi & \text{se } h=k\\ 0 & \text{se } h\neq k\end{cases}.$$

Quindi le funzioni trigonometriche sono una famiglia ortogonale rispetto al prodotto scalare di $L^2(-\pi,\pi)$, cioè

$$\langle f,g\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)g(t)\,dt\qquad\left(\text{oppure }\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\overline{g(t)}\,dt\right).$$

Convergenza delle serie trigonometriche

C'è un primo criterio grossolano:

Proposizione Se $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)<\infty$, allora la serie trigonometrica $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)$ converge uniformemente e totalmente in $\mathbb{R}$ ad una funzione continua e 2π-periodica.

dim $\left|\frac{a_0}{2}\right|+\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{t\in\mathbb{R}}|a_n\cos nt+b_n\sin nt|\le\left|\frac{a_0}{2}\right|+\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)<\infty$. $\square$

<u>Teorema</u> Se la serie trigonometrica $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)$ converge uniformemente in $[-\pi,\pi]$ a $f(t)$, allora

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx \quad \forall n\in\mathbb{N}, \qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx \quad \forall n>0.$$

<u>dim</u>. Se la serie converge uniformemente a f, si ha

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{t\in[-\pi,\pi]}\left|\sum_{n=N}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)\right|=0,$$

quindi, moltiplicando per $\cos mt$, vale anche, essendo $|\cos mt|\le 1$,

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{t\in[-\pi,\pi]}\left|\cos mt\sum_{n=N}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)\right|=0$$

cioè la serie

$$\frac{a_0}{2}\cos mt+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt\cos mt+b_n\sin nt\cos mt)$$

converge uniformemente a $f(t)\cos mt$ in $[-\pi,\pi]$. Quindi si può integrare termine a termine:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos mt\,dt=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\cos mt\,dt+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nt\cos mt\,dt+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nt\cos mt\,dt\right],$$

ma a secondo membro, in virtù delle relazioni di ortogonalità, è non nullo solo l'addendo m-simo, cioè così

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos mt\,dt=a_m\cdot\pi+b_m\cdot 0.$$

Ciò prova la tesi per gli a_m. Per i b_n si ripete il ragionamento con $\sin mx$ al posto di $\cos mx$. □

<u>Definizione</u> Per $f\in L^2(-\pi,\pi)$, i numeri

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\,dt,\quad n\ge 0,\qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin nt\,dt,\quad n>0,$$

si chiamano coefficienti di Fourier di f; la serie
$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$ si chiama serie di Fourier di f.

Osservazione Se $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ è pari ($f(-t) = f(t)$) allora $b_n = 0$ per ogni $n > 0$; se $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ è dispari ($f(-t) = -f(t)$) allora $a_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Definizione Un polinomio trigonometrico (di grado N) è una funzione della forma

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx) \quad \text{con} \quad |\alpha_N| + |\beta_N| > 0.$$

Indichiamo con $\mathcal{T}$ la famiglia di tutti i polinomi trigonometrici e con $\mathcal{T}_N$ la famiglia di tutti i polinomi trigonometrici di grado $\leq N$.

Proprietà di miglior approssimazione

Teorema Sia $f \in L^2(-\pi, \pi)$ e sia S_N la somma parziale N-sima della sua serie di Fourier, cioè

$$S_N = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Allora

$$\inf_{P \in \mathcal{T}_N} \|f - P\|_{L^2(-\pi,\pi)} = \|f - S_N\|_{L^2(-\pi,\pi)}.$$

dim. Sia $P \in \mathcal{T}_N$, $P(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (\alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt)$. Poiché $\|f - P\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2 + \|P\|_{L^2}^2 - 2 \langle f, P \rangle_{L^2}$, si ha per ortogonalità

$$\|P\|_{L^2}^2 = \langle P, P\rangle_{L^2} = \frac{\pi}{2}|\alpha_0|^2 + \pi\sum_{n=1}^{N}\left(|\alpha_n|^2+|\beta_n|^2\right),$$

$$\langle f, P\rangle_{L^2} = \pi\frac{a_0\alpha_0}{2} + \pi\sum_{n=1}^{N}\left(a_n\alpha_n + b_n\beta_n\right)$$

da cui, completando il quadrato,

$$\|f-P\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2 + \pi\left[\frac{|\alpha_0|^2}{2} - a_0\alpha_0 + \sum_{n=1}^{N}\left[|\alpha_n|^2 - 2a_n\alpha_n + |\beta_n|^2 - 2b_n\beta_n\right]\right] =$$

$$= \|f\|_{L^2}^2 + \pi\left[\frac{|\alpha_0-a_0|^2}{2} - \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left[|\alpha_n-a_n|^2 + |b_n-\beta_n|^2 - |a_n|^2 - |b_n|^2\right]\right] =$$

$$= \|f\|_{L^2}^2 + \pi\left[\frac{|\alpha_0-a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left[|\alpha_n-a_n|^2+|b_n-\beta_n|^2\right]\right] - \pi\left[\frac{|a_0|^2}{2} - \sum_{n=1}^{N}\left[|a_n|^2+|b_n|^2\right]\right].$$

Quindi $\|f-P\|_{L^2}^2$ è minimo quando

$$\alpha_0 = a_0, \quad \alpha_n = a_n, \quad \beta_n = b_n \quad \forall n,$$

cioè quando $P = S_N$. □

Corollario (disuguaglianza di Bessel): se $f \in L^2(-\pi,\pi)$,

$$\pi\left[\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|^2+|b_n|^2\right)\right] \le \|f\|_{L^2(-\pi,\pi)}^2,$$

ove a_n e b_n sono i coefficienti di Fourier di f. □

dim. Dal conto precedente con $P=S_N$ segue

$$\|f\|_{L^2}^2 - \pi\left[\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left(|a_n|^2+|b_n|^2\right)\right] = \|f-S_N\|_{L^2}^2 \ge 0 \quad \forall N\in\mathbb{N},$$

e per $N\to\infty$ si ha la tesi. □

Osservazione. La disuguaglianza di Bessel diventa una uguaglianza se e solo se $S_N \to f$ in $L^2(-\pi,\pi)$ per $N\to\infty$.

Ma è vero che $S_N \to f$ in $L^2(-\pi,\pi)$? Sì:

Teorema di completezza: Il sistema trigonometrico è completo in $L^2(-\pi,\pi)$, ossia $\mathcal{T}$ è denso in $L^2(-\pi,\pi)$; quindi, $S_N \to f$ in $L^2(-\pi,\pi)$ per ogni $f \in L^2(-\pi,\pi)$. (6)

dim. omessa. □

Corollario: (i) $S_N \to f$ in L^2 $\forall f \in L^2(-\pi,\pi)$,
(ii) vale l'uguaglianza di Bessel $\|f\|_{L^2}^2 = \pi\left[\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2)\right]$ per ogni $f \in L^2(-\pi,\pi)$,
(iii) vale l'identità di Parseval $\langle f, g\rangle_{L^2} = \pi\left[\frac{a_0 \alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n + b_n\beta_n)\right]$ per ogni $f, g \in L^2(-\pi,\pi)$, ove (a_n, b_n) sono i coefficienti di Fourier di f e (α_n, β_n) quelli di g.

dim. La (iii) segue per differenza, scrivendo (ii) per $f \pm g$. □

Convergenza puntuale delle serie di Fourier

Teorema (Carleson ~1960) Si ha $S_N(x) \to f(x)$ q.o. in $[-\pi,\pi]$, per ogni $f \in L^2(-\pi,\pi)$. □

(dim. omessa, è un teorema estremamente raffinato e difficile).

Teorema (Dirichlet). Sia $f \in L^2(-\pi,\pi)$. Se in $x_0 \in [-\pi,\pi]$ esistono finiti

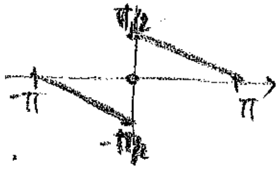
$$f(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} f(x), \quad f(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} f(x),$$

$$f'(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0^+)}{x - x_0}, \quad f'(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0^-)}{x - x_0},$$

allora $\exists \lim_{N \to \infty} S_N(x_0) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$. (dim. omessa □).

<u>Esempi</u> (1) La funzione $f(t) = \operatorname{sgn}(t)\,\frac{\pi - |t|}{2}$

è dispari, quindi $a_n = 0$; inoltre



$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi - t}{2}\sin nt\,dx = \frac{1}{n}.$$

Quindi la serie di Fourier di f è

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nt}{n},$$

essa converge a f in tutti i punti, per il teorema di Dirichlet; dalla uguaglianza di Bessel segue

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi - t}{2}\right)^2 dt = \frac{\pi^2}{6}.$$

Per $x = \frac{\pi}{2}$,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4},$$

per $x = \frac{\pi}{3}$

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \cdots + (-1)^k\left[\frac{1}{3k+1} + \frac{1}{3k+2}\right] + \cdots = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

2) Sia $g(t) = \frac{\pi - |t|}{2}$: questa funzione è pari, quindi $b_n = 0$ e

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos nt\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi - t}{2}\cos nt\,dt = \frac{1 - (-1)^n}{n^2\pi},$$

mentre $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi - t}{2}\,dt = \frac{\pi}{2}$. Quindi la serie di Fourier di g è

$$\frac{\pi}{4} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1 - (-1)^n}{n^2}\cos nt = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)t}{(2k+1)^2};$$

essa converge in ogni punto a $g(x)$.

<u>Osservazione</u> Prendiamo la funzione

$$h(x) = \frac{\pi - x}{2}, \quad x \in [0, \pi];$$

Di questa funzione possiamo ottenere in $[0,\pi]$ 3 diversi sviluppi di Fourier:

(A) prolungando h a $[-\pi, \pi]$ in modo dispari, otteniamo la f dell'esempio (1), e come abbiamo visto

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \quad \forall x \in]0, \pi];$$

(B) prolungando h a $[-\pi, \pi]$ in modo pari, otteniamo la g dell'esempio (2), e come si sa

$$h(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} \quad \forall x \in [0, \pi];$$

(C) prolungando h come funzione π-periodica, si trova rispetto al sistema $\{\cos 2nt, \sin 2nt\}$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi - t}{2} \sin 2nt \, dt = \frac{1}{2n} \quad \forall n > 0,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi - t}{2} \cos 2nt \, dt = \begin{cases} \pi/2 & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

Quindi

$$h(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{2n} \quad \forall x \in]0, \pi[.$$

<u>Convergenza uniforme</u>

Un caso importante nel quale le serie di Fourier convergono uniformemente è il seguente.

Teorema Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ una funzione 2π-periodica, derivabile, tale che $f'\in L^2(-\pi,\pi)$. Allora la serie di Fourier di f converge uniformemente a f in $\mathbb{R}$.

dim. Siano c_k, γ_k i coefficienti di Fourier di f e f' rispetto a $\{e^{ikt}\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Si ha, integrando per parti,

$$\gamma_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(t)e^{-ikt}\,dt=\frac{1}{2\pi}\cancel{\left[f(t)e^{-ikt}\right]_{-\pi}^{\pi}}+\frac{ik}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-ikt}\,dt,$$

cioè $\gamma_k=ikc_k$, e in particolare $\gamma_0=0$.

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_k|=\sum_{k\neq0}\left|\frac{\gamma_k}{k}\right|\leq\left[\sum_{k\neq0}|\gamma_k|^2\right]^{1/2}\left[\sum_{k\neq0}\frac{1}{k^2}\right]^{1/2}<\infty,$$

quindi per la 1ª proposizione (pag. 2) la serie di Fourier di f converge uniformemente a f. □

Si noti che, in generale, se f è continua e 2π-periodica la sua serie di Fourier NON converge uniformemente a f: cioè $S_N\to f$ in $L^2(-\pi,\pi)$ ma non in $C[-\pi,\pi]$. Tuttavia:

Teorema (di Fejer) Sia f continua e 2π-periodica. Posto $T_N=\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N+1}S_k$, si ha $T_N\to f$ uniformemente. (*dim* omessa □)

Quindi, $\mathcal{T}$ è denso in $\{f\in C[-\pi,\pi]: f(\pi)=f(-\pi)\}$, ma la miglior approssimazione di f in $\mathcal{T}_N$, nella norma uniforme, non è S_N.

Esercizi

1. Scrivere la serie di Fourier delle funzioni, tutte definite in $[-\pi,\pi]$:
(a) $\sin^2 x$, (b) x^2, (c) e^x, (d) e^{-x}, (e) $(\pi-|x|)^2$,
(f) $= \operatorname{sgn}(x)$, (g) $= \max\{0,-x\}$.

2. Scrivere l'uguaglianza di Bessel per ciascuna delle funzioni (a) — ... — (g).

3. Sia $f \in L^2(-\pi,\pi)$ e siano a_n, b_n i suoi coefficienti di Fourier. Si provi che per ogni $[a,b] \subseteq [-\pi,\pi]$ si ha

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}(b-a) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n}{n}(\sin nb - \sin na) - \frac{b_n}{n}(\cos nb - \cos na)\right].$$

4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodica e di classe C^k. Si provi che

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2k}(a_n^2 + b_n^2) < \infty.$$

5. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodica; supponiamo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k(|a_n| + |b_n|) < \infty.$$

Si provi che f è di classe C^k.