Analisi Matematica II - 2014-2015

Ingegneria Civile, Ambientale, Edile

Paolo Acquistapace, Vincenzo M. Tortorelli

Compendio sui numeri complessi

Numeri complessi

• Con *sistema dei numeri complessi* si intende l'uso della regola di calcolo $i^2 = -1$, ove i denota una costante *non reale*, con le espressioni $a + ib$ ove $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$. *Si aggiunge cioè una soluzione dell'equazione* $x^2 + 1 = 0$, che in $\mathbf{R}$ non ha soluzioni. Come si dimostra nel *Teorema fondamentale dell'Algebra*, facendo ciò si aggiungono in realtà tutte le radici di qualunque grado di ogni numero reale, anzi gli "zeri" di ogni polinomio con coefficienti sia reali che complessi.

- I numeri reali a si identificano con i numeri complessi del tipo $a + i0$. Quelli del tipo $0 + ib$, indicati semplicemente con ib, si chiamano numeri *immaginari puri*.

Se $a + ib = z$ è un numero complesso $\mathcal{R}ez = a$ ed $\mathcal{I}mz = b$ si dicono rispettivamente parte reale e parte immaginaria di z.

- Somma e prodotto di numeri complessi sono quindi la somm a e il prodotto di *polinomi a coefficienti reali* di primo grado nella variabile i, solo che nei calcoli si usa la regola $i^2 = -1$ per semplificare le espressioni e ridursi di nuovo a polinomi di *primo grado*:

$$(a + ib) + (x + iy) = (a + x) + i(b + y);$$

$$(a + ib)(x + iy) = ax + aiy + ibx + ibiy = ax + iay + ibx + i^2by = (ax - by) + i(ay + bx)$$

- Quindi ogni numero complesso $a + ib$ non nullo ha un reciproco $\frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{1}{a+ib}$, e il prodotto di due numeri complessi non nulli è non nullo (quindi si possono semplificare le eguaglianze).

-Considerando l'insieme dei numeri complessi con tali operazioni si parla di *campo* dei numeri complessi, che si indica con $\mathbf{C}$. Quindi con i numeri complessi si fanno tutte le operazioni che si fanno con i numeri reali: si dice che i numeri complessi sono *un'estensione* dei numeri reali come sistema con addizione e moltiplicazione commutative e distributive, dotate di unità ed elemento neutro, inverso e opposto.

- Si osserva che non si può estendere ai numeri complessi la relazione d'ordine che vi è tra i numeri reali in maniera coerente rispetto all'addizione e alla moltiplicazione ($i^2 = -1 < 0$, contro la regola che un quadrato è sempre non negativo).

• Spesso $\mathbf{C}$ si identifica con $\mathbf{R}^2$: $a + ib \sim (a, b)$ e ciò porta a interpretazioni geometriche:

- la somma di numeri complessi corrisponde alla somma di vettori (regola del parallelogramma), cioè, fissato uno degli addendi, corrisponde ad una traslazione.

- Fissato $w = \alpha + i\beta$ *diverso da* 0, si considera la funzione $a + ib = z \to zw$: essa determina una funzione lineare da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}^2$ di tipo particolare:

$$zw = a\alpha - b\beta + i(b\alpha + a\beta) \sim \begin{pmatrix} a\alpha - b\beta \\ b\alpha + a\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix};$$

la matrice associata è quella di una funzione lineare che conserva gli angoli tra curve incidenti. Infatti, raccogliendo $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} =: \lambda$ si ottiene una *rotazione* in senso antiorario di un angolo φ per il quale si abbia $\cos\varphi = \frac{\alpha}{\lambda}$ e $\sin\varphi = \frac{\beta}{\lambda}$, seguita da un *omotetia* di tale fattore λ.

In altri termini le trasformazioni del piano in sé che conservano gli angoli tra curve sono rappresentate da trasformazioni da $\mathbf{C}$ in sé del tipo $z \mapsto wz + v$.

- Il coniugato di un numero complesso $z = x + iy$ si indica con $\overline{z}$ ed è $x - iy$ (simmetrico rispetto all'asse orizzontale).

Per il prodotto tra $z = a + ib$ e il coniugato di $w = \alpha + i\beta$ si osserva che

$z\overline{w} = (a+ib)(\alpha - i\beta) = a\alpha + b\beta + i(b\alpha - a\beta) = (a,b)\bullet(\alpha,\beta) \ - \ i \det \begin{pmatrix} a & \alpha \\ b & \beta \end{pmatrix}$,
relazione che riassume tramite i numeri complessi tutta la geometria euclidea piana (trigonometria).
-Infine il *modulo* di un numero complesso $z = x + iy$ è la distanza dall'origine del corrispondente punto nel piano cartesiano $\sqrt{x^2 + y^2}$ e si indica con $|z|$. Si ha:

$$z \in \mathbf{R} \text{ se e solo se } \overline{z}z; \quad \overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}; \quad \overline{zw} = \overline{z}\overline{w}$$

$$|zw| = |z||w|, \ |z+w| \leq |z| + |w|; \quad |z|^2 = z\overline{z}, \ z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

Convergenza La convergenza di numeri complessi è quella delle coppie di numeri reali associati: in particolare $z_n \to z$ significa $|z_n - z| \to 0$. Quindi una successione o funzione a valori complessi converge ad un limite $l \in \mathbf{C}$ se e solo se le due successioni o funzioni date delle parti reali ed immaginarie convergono rispettivamente a $\mathcal{R}eL$ e $\mathcal{I}mL$.
- Di conseguenza si definiranno i sottoinsiemi chiusi, aperti, densi, connessi etc. di $\mathbf{C}$, così come le nozioni di chiusura, parte interna etc., esattamente come si fa per $\mathbf{R}^2$.
Forma trigonometrica Considerando le coordinate polari nel piano, ogni numero complesso si scrive nella forma $\rho(\cos\varphi + i \sin\varphi)$. L'angolo φ non è individuato se non a meno di multipli di 2π: ad esempio, se $a > 0$, $b > 0$ allora $a+ib = \sqrt{a^2+b^2}(\cos\ \text{artan}\frac{b}{a} + \sin\ \text{artan}\frac{b}{a})$. Appunto ρ si dirà modulo del numero complesso, e $\varphi \in [0; 2\pi[$ argomento principale.
Dalle formule di addizione, se $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ si ha:

$$\textbf{(*)} \qquad zw = \rho r(\cos(\varphi+\theta) + i\sin(\varphi+\theta))$$

Radici n-esime Quindi ogni numero complesso $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ha esattamente n radici n-esime complesse

$$z_1 = \sqrt[n]{\rho}(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}) \ldots z_n = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{2\pi(n-1)}{n} + \frac{\varphi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi(n-1)}{n} + \frac{\varphi}{n}\right)\right)$$

Le radici n-esime di 1 sono quindi i vertici di un poligono regolare inscritto nella circonferenza unitaria.
Forma esponenziale Considerando il modulo di un numero complesso come esponenziale e osservando che per **(*)** il prodotto di numeri complessi ha come argomento la somma degli argomenti riportata in $[0; 2\pi[$, si definisce $e^{\alpha+i\beta} = e^{\alpha}(\cos\beta + i\sin\beta) = e^{\alpha}e^{i\beta}$, constatando che ha le stesse regole di calcolo dell'esponenziale! Si ha inoltre

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z.$$

Si hanno a disposizione tutti gli srumenti (una funzione continua in due variabili assume valori di massimo e minimo su rettangoli chiusi) per dare una dimostrazione del seguente teorema (la si omette).
Teorema 1 (fondamentale dell'algebra) Ogni polinomio a coefficienti complessi $a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n$ di grado n è prodotto del coefficiente a_n per termini del tipo $(z-w)^k$. I numeri w sono tutte e sole le radici del polinomio, i numeri k sono le rispettive molteplicità e la loro somma è n.
- Poiché un polinomio a coefficienti reali, se ha come radice $w = a + ib$, ha *anche* come radice $a - ib$, si deduce che un polinomio a coefficienti reali si scrive come prodotto di termini del tipo $(x-c)^k$, $((x-a)^2 + b^2)^h = (x - (a+ib))^h(x - (a-ib))^h$, ove c sono le radici reali e la somma dei k e dei $2h$ è il grado del polinomio.

Integrali

• Una funzione $g : D \subset \mathbf{C} \to \mathbf{R}$ si identifica con la funzione $\tilde{g} : D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$:
$\tilde{g}(a, b) = g(a + ib)$.
Una funzione $\gamma : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, $\gamma(t) = \alpha(t)+i\beta(t)$ si identifica con il cammino $\tilde{\gamma} : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$:
$\tilde{\gamma}(t) = (\alpha(t), \beta(t))$.
Un funzione $f : D \subset \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $f(a + ib) = h(a + ib) + ik(a + ib)$ si identifica con $\tilde{f} : D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$:
$\tilde{f}(a, b) = (h(a, b), k(a, b))$.
-Una funzione a valori o definita sui complessi sarà *continua* se e solo se lo è la funzione associata. Un *cammino* a valori complessi sarà *derivabile* se e solo se lo è il cammino associato, cioè se e solo se lo sono le due funzioni parte reale ed immaginaria.
-Dati un cammino $\gamma : [A, B] \to \mathbf{C}$, $\gamma = \alpha + i\beta$, di classe C^1 a tratti, e una funzione $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $f \sim (h, k)$, si definisce l'integrale di f su γ:

$$\int_\gamma f(z)dz =: \int_A^B f(\gamma(t))\gamma'(t)dt;$$

esso è eguale al numero complesso dato dalla coppia degli integrali su γ dei vettori $(h, -k)$ e (k, h):

$$\int_A^B [h(\gamma(t))\alpha'(t) - k(\gamma(t))\beta'(t)]\, dt + i \int_A^B [h(\gamma(t))\beta'(t) + k(\gamma(t))\alpha'(t)]\, dt$$

Derivate

• Per le funzioni definite su $\mathbf{C}$ a valori in $\mathbf{C}$ vi è un immediata nozione di derivabilità: una funzione $f : \mathbf{C} \to C$, $f(a + ib) = h(a, b) + ik(a, b)$, si dice derivabile in $z = a + ib$ se esiste il limite per $w = u + iv \to 0$ del rapporto incrementale:

$$\lim_{w\to 0} \frac{f(z + w) - f(z)}{w} = \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{h(a + u, b + v) - h(a, v) + i(k(a + u, b + v) - k(a, b))}{u + iv} =$$

$$\lim_{u^2+v^2\to 0} \frac{[h(a + u, b + v) - h(a, b) + i(k(a + u, b + v) - k(a, b))](u - iv)}{u^2 + v^2}$$

Tale limite si indica con $\dfrac{df}{dz}(z) = f'(z)$. Inoltre, se esso esiste, considerando $w = u \in \mathbf{R}$, si ha in particolare:

$$(**) \qquad f'(z) = \frac{\partial h}{\partial a}(a, b) + i\frac{\partial k}{\partial a}(a, b)$$

Per le derivate in senso complesso valgono le usuali regole; in particolare vale la regola della derivata della funzione composta.

- La nozione di derivata di una funzione di variabile complessa a valori complessi è molto più qualificante che l'esitenza delle derivate rispetto alle variabile a e rispetto alla variabile b, (derivate parziali), delle funzioni componenti $f(a + ib) \sim (h(a, b), k(a, b))$.
-Non solo: è una nozione molto più impegnativa della differenziabilità. Considerando la mera definizione di derivata complessa, essa è equivalente all'approssimazione di f con una funzione $\mathbf{C}$-lineare, ovvero con il prodotto per $f'(z)$:

$$f(z + w) = f(z) + f'(z)w + o(w);$$

si ottiene dunque che le funzioni derivabili in senso complesso sono approssimabili con le funzioni del piano in sé che conservano gli angoli, purché $f'(z) \neq 0$:

$$\left(\begin{array}{c} h(a+u,b+v) \\ k(a+u,b+v) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} h(a,b) \\ k(a,b) \end{array} \right) + \left(\begin{array}{cc} \mathcal{R}ef'(z) & \mathcal{I}mf'(z) \\ \mathcal{I}mf'(z) & \mathcal{R}ef'(z) \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} u \\ v \end{array} \right) + o(\sqrt{u^2+v^2})$$

Quindi tra le funzioni differenziabili da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}^2$, cioè quelle approssimabili al primo ordine con una funzione lineare affine da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}^2$ qualsiasi, le funzioni che corrispondono a funzioni da $\mathbf{C}$ a $\mathbf{C}$ differenziabili in senso complesso sono una famiglia piuttosto ristretta.
- Un altro modo di vedere che l'esistenza della derivata complessa è una condizione molto particolare consiste nel considerare $u=0$ nel limite che definisce la derivata. Si ottiene:

$$(***) \qquad f'(z) = \frac{\partial k}{\partial b}(a,b) - i\frac{\partial h}{\partial b}(a,b);$$

eguagliando le parti reale ed immaginaria con quelle ottenute dalla $(**)$ si ottengono le equazioni di *Cauchy-Riemann* che devono essere soddisfatte dalla parte reale e dalla parte immaginaria di una funzione di *variabile complessa*, *derivabile in senso complesso*:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial k}{\partial b} = \dfrac{\partial h}{\partial a} = \mathcal{R}ef' \\ \\ -\dfrac{\partial h}{\partial b} = \dfrac{\partial k}{\partial a} = \mathcal{I}mf' \end{cases}$$

Queste condizioni non solo sono necessarie per la derivabilità in senso complesso, ma anche *sufficienti.*
• Altre importanti caratterizzazioni delle funzioni derivabili in senso complesso sono:
- una funzione f continua è derivabile in senso complesso in tutti i punti di un disco $D \subset \mathbf{C}$ se e solo se, dato un cammino $\gamma : [A,B] \to D$, $\gamma = \alpha + i\beta$, di classe C^1 a tratti, che sia chiuso (cioè $\gamma(A) = \gamma(B)$), si ha

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

In altre parole $f(z) \equiv (h(a,b), k(a,b))$ è derivabile in senso complesso se e solo se il campo $(h(a,b), k(a,b))$ da essa identificato è localmente esatto.
- Una funzione f è derivabile in senso complesso se e solo è derivabile inifinite volte
Per dimostrare questo fatto, il punto più delicato consiste nel mostrare che la funzione derivata prima è continua!
- una funzione f è derivabile in senso complesso se e solo se, dato z_0, vi è $r > 0$ tale che

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n f}{dz^n}(z_0)\frac{(z-z_0)^n}{n!}, \qquad |z-z_0| < r,$$

cioè non solo f è derivabile infinite volte, ma il suo sviluppo di Taylor di grado n in un qualsiasi z_0 (come funzione vettoriale) converge ad essa per $n \to \infty$ (ossia la funzione f è *analitica* in z_0).
Vale inoltre la seguente formula di Cauchy: se $\gamma(t) = z_0 + r\cos t + ir\sin t$, $t \in [0; 2\pi]$ (la circonferenza di centro z_0 e raggio r percorsa una sola volta), si ha

$$\frac{d^n f}{dz^n}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^n}dz$$

Tale formula è deducibile in maniera elementare dall'analiticità delle funzioni derivabili in senso complesso.
Inoltre essa si estende facilmente ad ogni cammino semplice e chiuso che non passi per z_0, grazie alla locale esattezza delle funzioni derivabili in senso complesso.