Il metodo di separazione delle variabili

Consideriamo il problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore 1-dimensionale:

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t), & x \in]0,\ell[,\ t \in]0,\infty[\\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0, & t \in [0,\infty[\\ u(x,0) = f(x), & x \in [0,\ell]. \end{cases}$$

Qui $u(x,t)$ è la distribuzione di temperatura all'istante t lungo un'asta di lunghezza ℓ, posta sull'asse x, avente distribuzione di temperatura $f(x)$ all'istante $t=0$, mantenuta a temperatura 0 alle estremità. Chiaramente si impone $f(0)=f(\ell)=0$.

Cerchiamo una soluzione a variabili separate, cioè della forma

$$u(x,t) = X(x)T(t), \quad \text{con } X \neq 0 \text{ in }]0,\ell[,\ T \neq 0 \text{ in }]0,\infty[.$$

Sostituendo si trova

$$X(x)T'(t) = \alpha^2 X''(x)T(t), \quad X(0)=X(\ell)=0,$$

ossia, separando le variabili,

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \alpha^2 \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Poichè il 1° membro è costante rispetto a x e il 2° è costante rispetto a t, deve esistere $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$X''(x) = \lambda X(x), \qquad T'(t) = \lambda\alpha^2 T(t).$$

Consideriamo la prima equazione;

$$\begin{cases} X'' = \lambda X, & x \in]0,\ell[, \\ X(0) = X(\ell) = 0. \end{cases}$$ (2)

Questa è una equazione differenziale ordinaria del 2° ordine a coefficienti costanti. Se $\lambda = 0$, si ha

$$X(x) = ax + b,$$

ma le condizioni agli estremi implicano $X = 0$, cosa che abbiamo vietato. Se $\lambda > 0$, le soluzioni sono

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda} x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda} x},$$

e nuovamente le condizioni agli estremi ci dicono che $X = 0$, il che non va bene. Resta il caso $\lambda < 0$, che fornisce

$$X(x) = c_1 \cos \sqrt{|\lambda|}\, x + c_2 \sin \sqrt{|\lambda|}\, x,$$

e le condizioni iniziali implicano

$$c_1 = 0, \qquad c_2 \sin \sqrt{|\lambda|}\, \ell = 0.$$

Se non vogliamo $c_2 = 0$, deve essere $\sqrt{|\lambda|} = \frac{n\pi}{\ell}$, cioè

$$\lambda = \lambda_n = -\frac{n^2 \pi^2}{\ell^2}.$$

In altre parole, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ in corrispondenza di λ_n vi è una soluzione non nulla $X_n(x) = B_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x$.

Risolviamo adesso la seconda equazione con $\lambda = \lambda_n$:

$$T'(t) = \alpha^2 \lambda_n T(t), \qquad t \in]0,\infty[;$$

questa equazione differenziale del 1° ordine ha per soluzioni

$$T_n(t) = D_n e^{\alpha^2 \lambda_n t} = D_n e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{\ell^2} t}$$

Quindi, posto $C_n = B_n D_n$, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ vi è la funzione (3)

$$u_n(x,t) = X_n(x) T_n(t) = C_n e^{-\frac{\alpha^2 \pi^2 n^2}{\ell^2} t} \sin \frac{n\pi}{\ell} x$$

la quale risolve l'equazione $(u_n)_t = \alpha^2 (u_n)_{xx}$, con le condizioni $u_n(0,t) = u_n(\ell,t) = 0$, ma non la condizione $u_n(0,x) = f(x)$.

Dato che il problema è lineare, è naturale a questo punto considerare

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{n^2 \alpha^2 \pi^2}{\ell^2} t} \sin \frac{n\pi}{\ell} x,$$

e richiedere che

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x = f(x).$$

Basterà a questo scopo prolungare f a $[-\ell,\ell]$ in modo dispari; così f avrà una serie di Fourier di soli seni

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x, \quad \text{ove} \quad b_n = \frac{2}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(y) \sin \frac{n\pi}{\ell} y \, dy,$$

e per avere $u(x,0) = f(x)$ sarà sufficiente scegliere $C_n = b_n$. Quindi

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{n^2 \alpha^2 \pi^2}{\ell^2} t} \sin \frac{n\pi}{\ell} x, \quad x \in [0,\ell], \ t \in [0,\infty[$$

Ma questa u è soluzione per davvero? Se $t > 0$, la presenza dell'esponenziale garantisce la possibilità di derivare termine a termine, quindi l'equazione differenziale è risolta; i dati $u(x,0) = 0$ e $u(x,\ell) = 0$ sono soddisfatti; la condizione $u(x,0) = f(x)$ vale nel senso di $L^2(0,\ell)$, ma se si suppone f derivabile con $f' \in L^2(0,\ell)$ allora la convergenza della sua serie di Fourier è uniforme, e questo garantisce la continuità di u in $[0,\ell] \times [0,\infty[$ e la validità della condizione $u(x,0) = f(x)$ $\forall x \in [0,\ell]$.

In modo analogo si può risolvere il problema di Cauchy-Neumann:

$$\begin{cases} u_t(t,x) = \alpha^2 u_{xx}(t,x), & x \in]0,\ell[\times]0,\infty[, \\ u_x(0,t) = u_x(\ell,t) = 0, & t \in [0,\infty[, \\ u(x,0) = f(x), & x \in [0,\ell], \end{cases}$$

In questo caso, l'asta è termicamente isolata agli estremi, ossia non avviene scambio di calore attraverso le estremità dell'asta.

Procedendo analogamente, occorre risolvere

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda X(x) \\ X'(0) = X'(\ell) = 0 \end{cases}$$

e si vede che per $\lambda > 0$ non ci sono soluzioni non nulle, mentre per $\lambda \le 0$ si trova, quando $\lambda = \lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}$, $n \in \mathbb{N}$, la soluzione

$$X_n(x) = A_n \cos \frac{n\pi}{\ell} x, \quad n \in \mathbb{N}$$

(si noti che vi è anche la soluzione costante $X_0(x) \equiv A_0$).

La corrispondente funzione $T_n(t)$ è, come prima,

$$T_n(t) = D_n e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{\ell^2} t}, \quad n \in \mathbb{N}$$

(quindi c'è anche $T_0(t) \equiv D_0$). In definitiva

$$u_n(x,t) = c_n e^{-\frac{\alpha^2 \pi^2 n^2}{\ell^2} t} \cos \frac{n\pi}{\ell} x, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Si considera poi la serie

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{\alpha^2 \pi^2 n^2}{\ell^2} t} \cos \frac{n\pi}{\ell} x,$$

ove abbiamo scritto $\frac{c_0}{2}$ invece di c_0, il che è lecito trattandosi di una costante arbitraria. Infine, per avere $u(x,0) = f(x)$ occorre prolungare f in modo pari a $[-\ell,\ell]$, considerarne la serie di Fourier, che sarà di soli coseni,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{\ell} x,$$

e scegliere $c_n = a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. In questo modo, si ha per lo meno $u(x,0) = f(x)$ nel senso di $L^2(0,\ell)$.

Notiamo che, per dar senso alle condizioni agli estremi, a noi serve $u \in C^1([0,\ell] \times]0,\infty[)$, e questo c'è, per il buon comportamento degli esponenziali. Se vogliamo anche $u \in C([0,\ell] \times [0,\infty[)$, ci serve che f sia continua e che la sua serie di Fourier converga uniformemente; per questo basta che f sia derivabile con $f' \in L^2(0,\ell)$.