ANALISI 2 | Lu 18/5/15 e Ma. 19/5/15

La soluzione dei problemi di Cauchy-Dirichlet e di Cauchy-Neumann analizzati nella scorsa lezione è unico. Infatti se u, v risolvono il problema di Cauchy-Dirichlet, allora $w = u - v$ è soluzione di

$$\begin{cases} w_t(x,t) - \alpha^2 w_{xx}(x,t) = 0, & x \in]0,\ell[,\ t \in]0,\infty[\\ w(0,t) = w(\ell,t) = 0, & t \in [0,\infty[\\ w(x,0) = 0, & x \in [0,\ell]. \end{cases}$$

Fissato $t > 0$, moltiplichiamo per $w(x,t)$ l'equazione differenziale e integriamo su $[0,\ell]$:

$$\int_0^\ell w_t(x,t)\, w(x,t)\, dx = \alpha^2 \int_0^\ell w_{xx}(x,t)\, w(x,t)\, dx,$$

ossia, integrando per parti,

$$\frac{1}{2}\int_0^\ell \frac{d}{dt}|w(t,x)|^2 dx = \alpha^2\left[\Big[w_x(x,t)\, w(x,t)\Big]_0^\ell - \int_0^\ell |w_x(x,t)|^2 dx\right],$$

e poiché $w(0,t) = w(\ell,t) = 0$,

$$\frac{1}{2}\int_0^\ell \frac{d}{dt}|w(t,x)|^2 dx = -\alpha^2 \int_0^\ell |w_x(x,t)|^2 dx \le 0.$$

La derivata rispetto a t può uscire dall'integrale (perché w è di classe C^1 per $t > 0$), e si ha

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\ell |w(t,x)|^2 dx \le 0.$$

Ma per $t = 0$ si ha $\frac{1}{2}\int_0^\ell |w(0,x)|^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^\ell 0\, dx = 0$, quindi

$$0 \le \int_0^\ell |w(t,x)|^2 dx \le 0 \quad \forall t \ge 0.$$

L'unica funzione continua non negativa che ha integrale nullo è la funzione 0: pertanto $w(x,t)=0$ $\forall x\in[0,\ell]$, $\forall t\geq 0$. Quindi $u\equiv v$.

Per il problema di Cauchy-Neumann si ragiona esattamente allo stesso modo: infatti la differenza w di due soluzioni verifica $w_x(0,t)=w_x(\ell,t)=0$, cosicché il termine $\left[w_x(x,t)\,w(x,t)\right]_0^{\ell}$ sparisce come prima.

<u>Il problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione delle onde 1-dimensionale.</u>

Si tratta dell'analisi delle oscillazioni di una corda tesa, fissata agli estremi:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t)-c^2u_{xx}(x,t)=0, & x\in\,]0,\ell[,\ t>0,\\ u(0,t)=u(\ell,t)=0, & t\geq 0,\\ u(x,0)=f(x),\ u_t(x,0)=g(x), & x\in[0,\ell]\end{cases}$$

con f,g funzioni continue assegnate, tali che $f(0)=f(\ell)=0$.
La quantità $u(x,t)$ misura lo spostamento verticale della corda nel punto x all'istante t; la costante c è legata all'elasticità della corda, quindi in particolare alla sua tensione.
Come sempre, cerchiamo soluzioni a variabili separate:

$$X(x)\,T(t),\qquad \text{con } X(x),\,T(t)\neq 0.$$

Si trova
$$T''(t)X(x) - c^2 T(t) X''(x) = 0,$$
da cui
$$\frac{1}{c^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \in \mathbb{R}.$$
Risolvendo dapprima
$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, & x \in]0,\ell[\\ X(0) = X(\ell) = 0 \end{cases}$$
si trova una soluzione non nulla, come sappiamo, se e solo se
$\lambda = \lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}$, e cioè
$$X_n(x) = B_n \sin \frac{n\pi}{\ell}x;$$
risolvendo poi l'equazione
$$T''(t) = -\frac{n^2\pi^2 c^2}{\ell^2} T(t),$$
si trovano le soluzioni
$$T_n(t) = P_n \cos \frac{n\pi c t}{\ell} + Q_n \sin \frac{n\pi c}{\ell}t,$$
e quindi una candidata soluzione è
$$u_n(x,t) = \left(C_n \cos \frac{n\pi c}{\ell}t + D_n \sin \frac{n\pi c}{\ell}t\right) \sin \frac{n\pi}{\ell}x.$$
Dobbiamo ora imporre le condizioni
$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x):$$
è naturale, dopo aver prolungato f e g a $[-\ell,\ell]$ per disparità,

scrivere le serie di Fourier di soli seni per f e g

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{\ell}x, \qquad g(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin\frac{n\pi}{\ell}x,$$

e scegliere i coefficienti C_n, D_n tali che

$$C_n=b_n, \quad \frac{n\pi c}{\ell}D_n=\beta_n ;$$

in questo modo

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n\cos\frac{n\pi c}{\ell}t+\frac{\ell}{n\pi c}\beta_n\sin\frac{n\pi c}{\ell}t\right)\sin\frac{n\pi}{\ell}x$$

verifica, nel senso di $L^2(0,\ell)$,

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x=f(x), \quad u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x=g(x).$$

Questa funzione u verifica <u>formalmente</u> il problema di Cauchy-Dirichlet: si noti che per $t>0$ non c'è alcun effetto regolarizzante sulla serie.

Però, se supponiamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2|b_n|<\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n|\beta_n|<\infty,$$

allora certamente $u\in C^2([0,\ell]\times[0,\infty[)$ e risolve il problema - le condizioni sopra scritte valgono se scegliamo

f derivabile 3 volte, $f'''\in L^2(0,\ell)$, $f(0)=f(\ell)=0$,

g derivabile 2 volte, $g''\in L^2(0,\ell)$, $g(0)=g(\ell)=0$.

Infatti in tal caso, detti σ_n, γ_n i coefficienti di Fourier di g' e g'', si ha $|\gamma_n|=n|\sigma_n|=n^2|\beta_n|$, da cui $\sum_{n=1}^{\infty} n|\beta_n|\le\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\gamma_n|^2\right)^{1/2}<\infty.$

Il calcolo per f è analogo

Si noti che anche per questo problema vi è unicità. Infatti, osserviamo preliminarmente che possiamo riscrivere la soluzione grazie alle formule di Werner, nella forma

$$(*) \quad u(x,t)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[b_n\left[\sin\frac{n\pi}{\ell}(x-ct)+\sin\frac{n\pi}{\ell}(x+ct)\right]+\frac{\ell}{n\pi c}\beta_n\left[\cos\frac{n\pi}{\ell}(x-ct)-\cos\frac{n\pi}{\ell}(x+ct)\right]\right],$$

cioè come una funzione $\alpha(x-ct)+\beta(x+ct)$.

Questo è un fatto generale, nel senso che tutte le soluzioni dell'equazione $u_{tt}-c^2u_{xx}=0$ si scrivono in tale forma.

Poniamo infatti $\xi=x-ct$, $\eta=x+ct$: si ha quindi $x=\frac{\eta+\xi}{2}$, $t=\frac{\eta-\xi}{2c}$ e la funzione $v(\xi,\eta)=u\left(\frac{\eta+\xi}{2},\frac{\eta-\xi}{2c}\right)$ verifica

$$v_\xi(\xi,\eta)=\frac{1}{2}u_x\left(\frac{\eta+\xi}{2},\frac{\eta-\xi}{2c}\right)-\frac{1}{2c}u_t\left(\frac{\eta+\xi}{2},\frac{\eta-\xi}{2c}\right),$$

$$v_{\xi\eta}(\xi,\eta)=\frac{1}{4}u_{xx}\left(\frac{\eta+\xi}{2},\frac{\eta-\xi}{2c}\right)+\cancel{\frac{1}{4c}u_{xt}\left(\frac{\eta+\xi}{2},\frac{\eta-\xi}{2c}\right)}-$$

$$-\cancel{\frac{1}{4c}u_{tx}\left(\frac{\eta+\xi}{2},\frac{\eta-\xi}{2c}\right)}+\frac{1}{4c^2}u_{tt}\left(\frac{\eta+\xi}{2},\frac{\eta-\xi}{2c}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left[u_{xx}(x,t)-\frac{1}{c^2}u_{tt}(x,t)\right]=0.$$

L'equazione $v_{\xi\eta}=0$ implica, integrando 2 volte,

$v_\xi(\xi,\eta)=$ costante rispetto a η $=\alpha(\xi)$

$v(\xi,\eta)=A(\xi)+$ costante rispetto a ξ $=A(\xi)+B(\eta)$ [ove $A'=\alpha$].

Dunque $v(\xi,\eta)=A(\xi)+B(\eta)=A(x-ct)+B(x+ct)$, con $A,B\in C^1$.

Però A, B vanno prese di classe C^2 se vogliamo che

$$(\circledast) \qquad u(x,t) = A(x-ct) + B(x+ct)$$

abbia u_{tt} e u_{xx} continue. Se u risolve l'equazione in $]a,b[\times]0,\infty[$, occorrerà che

$$A \in C^2(-\infty, b), \quad B \in C^2(a, +\infty),$$

e se ci sono le condizioni ai limiti, servirà anche

$$A \in C^1((-\infty, b]), \quad B \in C^1([a, \infty)).$$

Proviamo l'unicità per il problema di Cauchy-Dirichlet: se u, v risolvono tale problema, allora $w = u - v$ risolve

$$\begin{cases} w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0 & \text{in }]0,\ell[\times]0,\infty[, \\ w(0,t) = w(\ell,t) = 0 & \text{in } [0,\infty[, \\ w(x,0) = 0, \ w_t(x,0) = 0 & \text{in } [0,\ell] \end{cases}$$

e dovrà essere

$$w(x,t) = \alpha(x-ct) + \beta(x+ct)$$

con $\alpha \in C^2(-\infty, \ell) \cap C^1((-\infty, \ell])$, $\beta \in C^2(0,\infty) \cap C^1([0,\infty))$.

Le condizioni $w(0,t) = w(\ell,t) = 0$ ci dicono che

$$(1)\ \alpha(-ct) + \beta(ct) = 0, \quad (2)\ \alpha(\ell - ct) + \beta(\ell + ct) = 0 \quad \forall t \geq 0,$$

mentre le condizioni per $t = 0$ ci forniscono

$$(3)\ \alpha(x) + \beta(x) = 0, \quad (4)\ -c\alpha'(x) + c\beta'(x) = 0 \quad \forall x \in [0,\ell].$$

Dalle prime due relazioni per α e β segue che α, β sono 2ℓ-periodiche:

infatti, se $\xi-\ell \geq 0$ si ha $\beta(\xi-\ell) \overset{(1)}{=} -\alpha(\ell-\xi) \overset{(2)}{=} \beta(\ell+\xi)$, ovvero, posto $\eta = \xi-\ell \geq 0$,

$$\beta(\eta) = -\alpha(-\eta) = \beta(\eta+2\ell) \quad \forall \eta \geq 0.$$

Da qui segue, poi,

$$\alpha(-\xi) \overset{(1)}{=} -\beta(\xi) = -\beta(\xi+2\ell) \overset{(1)}{=} \alpha(-\xi-2\ell) \quad \forall \xi \geq 0,$$

ovvero, posto $\theta = \ell-\xi \leq \ell$,

$$\alpha(\theta) = \alpha(\ell-\xi) \overset{(2)}{=} -\beta(\ell+\xi) = -\beta(3\ell+\xi) \overset{(2)}{=} \alpha(-\ell-\xi) = \alpha(\theta-2\ell) \quad \forall \theta \leq \ell.$$

Inoltre, da una parte $\alpha' - \beta' = 0$ in $[0,\ell]$, e dall'altra, essendo $\alpha+\beta=0$ in $[0,\ell]$, si ha anche $\alpha'+\beta'=0$ in $[0,\ell]$: perciò $\alpha'=\beta'=0$ in $[0,\ell]$, ossia $\alpha(x) = A = -\beta(x)$ in $[0,\ell]$. D'altronde, se $\xi \in [0,\ell]$ si ha $\alpha(-\xi) \overset{(1)}{=} -\beta(\xi) = A$, quindi $\alpha = A$ in $[-\ell,\ell]$ e analogamente, $\beta(\xi+\ell) \overset{(2)}{=} -\alpha(\ell-\xi) = -A$ per $\xi \in [0,\ell]$, ossia $\beta = -A$ in $[0,2\ell]$. Per periodicità, $\alpha = A$ in $(-\infty,\ell]$ e $\beta = -A$ in $[0,\infty)$. Ne deriva, finalmente,

$$w(x,t) = \alpha(x-ct) + \beta(x+ct) = A - A = 0 \quad \forall x \in [0,\ell], \forall t \geq 0.$$

<u>Osservazione</u>: la funzione $u(x,t)$, definita dalla serie ⊛, può scriversi nella forma

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[F(x-ct) + F(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} G(s)\,ds$$

ove F e G sono i prolungamenti dispari di f e g a $[-\ell,\ell]$ (poi prolungati a $\mathbb{R}$ per 2ℓ-periodicità).

Unicità per il problema di Cauchy Neumann per l'equazione delle onde 1-dimensionale. (8)

Se u, v risolvono

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = A(x,t) & \text{in }]0,\ell[\times]0,\infty[\\ u_x(0,t) = u_x(\ell,t) = b(t) & \text{in } [0,\infty[, \\ u(x,0) = \alpha(x),\ u_t(x,0) = \beta(x) & \text{in } [0,\ell], \end{cases}$$

con $A \in C^0([0,\ell]\times[0,\infty[)$, $b \in C([0,\infty[)$, $\alpha, \beta \in C([0,\ell])$, allora $w = u - v$ risolve

$$\begin{cases} w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0 & \text{in }]0,\ell[\times]0,\infty[, \\ w_x(0,t) = w_x(\ell,t) = 0 & \text{in } [0,\infty[, \\ w(x,0) = 0,\ w_t(x,0) = 0 & \text{in } [0,\ell]. \end{cases}$$

Vogliamo provare che $w \equiv 0$.

Si sa che

$$w(x,t) = A(x-ct) + B(x+ct),$$

con $A \in C^2(-\infty,\ell)$, $B \in C^2(0,\infty)$. Le condizioni al contorno implicano

$$\begin{cases} A'(-ct) + B'(ct) = 0 & \forall t \geq 0 \\ A'(\ell-ct) + B'(\ell+ct) = 0 & \forall t \geq 0 \\ A(x) + B(x) = 0 & \forall x \in [0,\ell] \\ -c\left[A'(x) - B'(x)\right] = 0 & \forall x \in [0,\ell] \end{cases}$$

ovvero

(1) $A'(-\xi)+B'(\xi)=0 \quad \forall \xi\geq 0$

(2) $A'(\ell-\xi)+B'(\ell+\xi)=0 \quad \forall \xi\geq 0$

(3) $A(x)+B(x)=0 \quad \forall x\in[0,\ell]$

(4) $A'(x)-B'(x)=0 \quad \forall x\in[0,\ell]$.

Derivando (3), e tenendo conto di (4) si ha $A'=0$ e $B'=0$ in $[0,\ell]$; quindi, da (3), esiste $K\in\mathbb{R}$ tale che

$$A(x)=K=-B(x) \quad \forall x\in[0,\ell].$$

Ma se $x\in[-\ell,0]$, da (1) segue

$$A'(x)=-B'(-x)=0$$

quindi $A=K$ in $[-\ell,\ell]$ e, da (2), con $x=\ell+\xi\in[\ell,2\ell]$, $B'(x)=-A'(2\ell-x)=0$. Quindi $B=-K$ in $[0,2\ell]$.

Poi, se $\xi\geq\ell$, da (1) e (2) segue

$$B'(\xi-\ell)=-A'(\ell-\xi)=B'(\xi+\ell),$$

ovvero, con $x=\xi-\ell\geq 0$,

$$B'(x)=B'(x+2\ell)=0 \quad \forall x\geq 0.$$

Perciò,

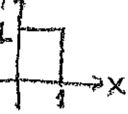
$$A'(\ell-\xi)=0 \quad \forall \xi\geq 0$$

ossia $A'=0$ in $(-\infty,\ell]$. Per continuità, $A=K$ in $]-\infty,\ell]$

e $B=-K$ in $[0,\infty[$. Pertanto

$$w(x,t)=K-K=0 \quad \forall x\in[0,\ell],\ \forall t\geq 0.$$

Il problema di Dirichlet per l'equazione 2-dimensionale di Laplace in un rettangolo.



Consideriamo l'equazione di Laplace nel rettangolo $[0,1]\times[0,\ell]$:

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 & x\in\,]0,1[,\ y\in\,]0,\ell[,\\ u(x,0)=f_1(x),\ u(1,y)=f_2(y), & \\ u(x,\ell)=f_3(x),\ u(0,y)=f_4(y) & x\in[0,1],\ y\in[0,\ell]. \end{cases}$$

con f_1, f_2, f_3, f_4 funzioni continue assegnate, tali che

$$f_1(1)=f_2(0)=0,\quad f_2(\ell)=f_3(1)=0,\quad f_3(0)=f_4(\ell)=0,\quad f_4(0)=f_1(0)=0.$$

Sfruttando la linearità del problema, cercheremo una soluzione come somma delle soluzioni dei problemi in cui i dati sono rispettivamente

$$\begin{pmatrix} f_1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 0\\f_2\\0\\0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 0\\0\\f_3\\0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\f_4\end{pmatrix}.$$

Cerchiamo per esempio una soluzione u_1 di

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 & x\in\,]0,1[,\ y\in\,]0,\ell[\\ u(x,0)=f_1(x),\quad u(x,\ell)=0, & x\in[0,1]\\ u(1,y)=0,\quad u(0,y)=0 & y\in[0,\ell] \end{cases}$$

usando il metodo di separazione delle variabili. Sia dunque

$$u_1(x,y) = X(x)\,Y(y)$$

con $X \neq 0$, $Y \neq 0$. Si ha

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0 \quad \text{in }]0,1[\times]0,\ell[,$$

quindi

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

dunque $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$X''(x) = \lambda X(x), \quad X(0) = X(1) = 0,$$

$$Y''(y) = -\lambda Y(y), \quad Y(\ell) = 0.$$

La prima equazione la conosciamo bene: ha soluzione non nulla se e solo se $\lambda = \lambda_n = -n^2\pi^2$, ed è $X_n(x) = \sin n\pi x$.

La seconda equazione, con $\lambda = \lambda_n$, diventa

$$\begin{cases} Y''(y) - n^2\pi^2 Y(y) = 0, & y \in]0,\ell[\\ Y(\ell) = 0 \end{cases}$$

ed ha le soluzioni

$$Y_n(y) = c_1 e^{n\pi y} + c_2 e^{-n\pi y},$$

e dalla condizione $Y(\ell) = 0$ segue $c_1 e^{n\pi\ell} + c_2 e^{-n\pi\ell} = 0$,

ossia $Y(y) = Y_n(y) = c_1\left[e^{n\pi y} - e^{2n\pi\ell} e^{-n\pi y}\right] =$

$$= c_1 e^{n\pi\ell}\left[e^{n\pi(y-\ell)} - e^{n\pi(\ell-y)}\right] = c_n \sinh n\pi(\ell-y).$$

Per verificare la quarta condizione $u(x,0) = f_1(x)$, consideriamo

$$u_1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) Y_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh n\pi(\ell-y) \sin n\pi x,$$

e imponiamo che

$$u_1(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh n\pi\ell \sin n\pi x = f_1(x).$$

Se prolunghiamo f in modo dispari a $[-1,1]$, la sua serie di Fourier sarà $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$, con $b_n = 2\int_0^1 f_1(x) \sin n\pi x \, dx$; ci serve quindi che

$$c_n \sinh n\pi\ell = b_n, \quad \forall n \geq 1,$$

ossia

$$c_n = \frac{b_n}{\sinh n\pi\ell} \quad \forall n \geq 1$$

Quindi

$$u_1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\sinh n\pi\ell} \sinh n\pi(\ell-y) \sin n\pi x.$$

Questa funzione è di classe C^2 all'interno del rettangolo, grazie alla presenza del termine $\frac{\sinh n\pi(\ell-y)}{\sinh n\pi\ell}$, e verifica tutte le condizioni richieste, purché la serie di Fourier di f converga uniformemente (e quindi servirà f_1 derivabile con $f_1' \in L^2(0,1)$).

In modo analogo si costruiscono le funzioni u_2, u_3, u_4 relative ai problemi con dati $\begin{pmatrix} 0 \\ f_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ f_3 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_4 \end{pmatrix}$ rispettivamente

Si ha, specificamente,

$$u_2(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \frac{\sinh \frac{n\pi x}{\ell}}{\sinh \frac{n\pi}{\ell}} \sinh \frac{n\pi}{\ell} y, \quad \text{con} \quad d_n = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f_2(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} t \, dt,$$

$$u_3(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\sinh n\pi y}{\sinh n\pi} \sin n\pi x, \quad \text{con} \quad a_n = 2\int_0^1 f_3(s) \sin n\pi s \, ds,$$

$$u_4(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \frac{\sinh \frac{n\pi}{\ell}(1-x)}{\sinh \frac{n\pi}{\ell}} \sin \frac{n\pi}{\ell} y, \quad \text{con} \quad \gamma_n = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f_4(u) \sin \frac{n\pi}{\ell} u \, du.$$

La funzione $u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$ è nulla sui vertici del rettangolo e assume tutti i dati richiesti f_1, f_2, f_3, f_4; inoltre essa è regolare all'interno e risolve l'equazione.

Osservazione. Se i dati f_1, f_2, f_3, f_4 soddisfano le condizioni di compatibilità nel senso che

$$f_1(1) = f_2(0) = \alpha_1; \quad f_2(\ell) = f_3(1) = \alpha_2, \quad f_3(0) = f_4(\ell) = \alpha_3, \quad f_4(0) = f_1(0) = \alpha_4,$$

con $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$, il metodo precedente fornisce una soluzione u che assume i dati al bordo solo sui lati aperti, mentre nei vertici continua a valere 0. Però, sommando a u una funzione della forma

$$z(x,y) = p + qx + ry + sxy,$$

allora $u+z$ risolve ancora l'equazione di Laplace. Per quanto riguarda le condizioni al bordo, poiché

$$z(x,0) = p + qx, \quad z(1,y) = p + q + (r+s)y,$$
$$z(x,\ell) = p + qx + r\ell + sx\ell, \quad z(0,y) = p + ry,$$

se u sul bordo vale rispettivamente

$u(x,0) = f_1(x) - p - qx$, anzichè $f_1(x)$,

$u(1,y) = f_2(y) - p - q - (r+s)y$, anzichè $f_2(y)$.

$u(x,\ell) = f_3(x) - p - qx - r\ell - sx\ell$, anzichè $f_3(x)$,

$u(0,y) = f_4(y) - p - ry$, anzichè $f_4(y)$,

allora $u+z$ assume sul bordo i dati f_1, f_2, f_3, f_4; inoltre, se scegliamo i parametri p, q, r, s in modo che

$$z(1,0) = p+q = \alpha_1,$$
$$z(1,\ell) = p+q+r\ell+s\ell = \alpha_2,$$
$$z(0,\ell) = p+r\ell = \alpha_3$$
$$z(0,0) = p = \alpha_4,$$

il che significa $p=\alpha_4$, $q=\alpha_1-\alpha_4$, $r=\frac{\alpha_3-\alpha_4}{\ell}$, $s=\frac{\alpha_2-\alpha_1-\alpha_3+\alpha_4}{\ell}$, allora, essendo u nulla nei 4 vertici, la $u+z$ nei vertici assume i valori $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ e α_4; pertanto $u+z$ è soluzione del problema di Dirichlet.

<u>Unicità</u> Se $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar\Omega)$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ di classe C^1 a tratti, u, v risolvono
$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy} = f(x,y) & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{con } f \in C(\bar\Omega),\ g \in C^1(\partial\Omega))$$
allora $u = v$ in $\bar\Omega$.

Infatti, se $w = u - v$ si ha, usando la formula di Gauss-Green,
$$0 = \int_\Omega \Delta w \cdot w\, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial n} \cdot w\, ds - \int_\Omega |Dw|^2 dx,$$
quindi $Dw = 0$ su Ω; ma $w = 0$ sul bordo, quindi $w = 0$ cioè $u = v$.