ANALISI 2 | Gi 21/5/15

Il problema di Dirichlet per l'operatore di Laplace bi-dimensionale su un aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

Faremo vedere che il problema

(*)
$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 & \text{in } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = f \in C(\partial\Omega) \end{cases}$$

ha al più una soluzione; nel caso in cui Ω è un disco, ne daremo una formula esplicita.

Ci occorre una proposizione.

Proposizione (principio del massimo) Sia $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ una funzione tale che $u_{xx}+u_{yy}=0$ in $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aperto limitato. Allora

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u \quad , \quad \min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u \quad ,$$

ossia u assume valore massimo e valore minimo in punti del bordo.

dim. Sia $\varepsilon > 0$ e poniamo, per $(\bar{x},\bar{y}) \in \Omega$ fissato,

$$w(x,y) = u(x,y) + \varepsilon\left[(x-\bar{x})^2 + (y-\bar{y})^2\right].$$

Proviamo che

$$\max_{\bar{\Omega}} w = \max_{\partial\Omega} w :$$

se così non fosse, avremmo $\max_{\bar{\Omega}} w > \max_{\partial\Omega} w$, quindi esisterebbe un punto di massimo assoluto (x_0,y_0) interno a Ω. In tale punto, il gradiente di w sarebbe nullo e la matrice Hessiana H sarebbe semidefinita negativa: calcolandola su $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ e su $e_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ avremmo

$$\langle He_1, e_1\rangle_2 = w_{xx}(x_0,y_0)\le 0, \quad \langle He_2, e_2\rangle_2 = w_{yy}(x_0,y_0)\le 0,$$

da cui

$$w_{xx}(x_0,y_0)+w_{yy}(x_0,y_0)\le 0.$$

Ma ciò è assurdo perché in ogni punto di Ω si ha

$$w_{xx}+w_{yy}=u_{xx}+u_{yy}+4\varepsilon = 4\varepsilon>0.$$

Per u si ha, di conseguenza, essendo $u\le w$,

$$\max_{\overline{\Omega}} u \le \max_{\overline{\Omega}} w = \max_{\partial\Omega} w \le \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon d^2,$$

ove

$$d=\sup_{(x,y)\in\overline{\Omega}}\left\{|x-\bar{x}|^2+|y-\bar{y}|^2\right\};$$

si ha $d<\infty$ perché Ω è limitato. Dunque, per l'arbitrarietà di ε,

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

In modo analogo, utilizzando la funzione $v(x,y)=u(x,y)-\varepsilon[(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2]$, si prova che $\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u$. $\square$

Corollario La soluzione del problema (*) è unica.

dim. Se u_1, u_2 sono soluzioni di (*), allora $w=u_1-u_2\in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ e verifica $w_{xx}+w_{yy}=0$ in Ω, $w|_{\partial\Omega}=0$. Per il principio del massimo, $w\equiv 0$ in $\overline{\Omega}$. $\square$

Osservazione Il principio di massimo vale anche per l'operatore di Laplace N-dimensionale $\Delta u := \sum_{i=1}^{N} u_{x_i x_i}$ in un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$; quindi anche in questo caso vi è l'unicità della soluzione del problema di Dirichlet. (3)

Sia ora $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < R^2\}$. Consideriamo il problema di Dirichlet
$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{in } B, \\ u = f & \text{in } \partial B \end{cases}$$
ove f è una funzione continua. Possiamo ben rappresentare f in coordinate polari:
$$f = f(\theta) : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}, \quad f(-\pi) = f(\pi), \quad f \in C[-\pi,\pi]$$
Proviamo a scrivere anche l'equazione differenziale in coordinate polari: se $v(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$, risulta
$$v_r(r,\theta) = u_x(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot\cos\theta + u_y(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta,$$
$$v_{rr}(r,\theta) = u_{xx}(\dots)\cos^2\theta + u_{xy}(\dots)\sin\theta\cos\theta + u_{xy}(\dots)\cos\theta\sin\theta + u_{yy}(\dots)\sin^2\theta =$$
$$= u_{xx}\cos^2\theta + u_{yy}\sin^2\theta + 2u_{xy}\sin\theta\cos\theta,$$
$$v_\theta(r,\theta) = u_x\cdot(-r\sin\theta) + u_y\cdot(r\cos\theta),$$
$$v_{\theta\theta}(r,\theta) = u_{xx}\cdot r^2\sin^2\theta + u_{xy}(-r^2\sin\theta\cos\theta) - u_x\cdot r\cos\theta + u_{xy}(-r^2\sin\theta\cos\theta) + u_{yy}(r^2\cos^2\theta) - u_y\cdot r\sin\theta;$$
quindi
$$v_{rr} + \frac{1}{r^2}v_{\theta\theta} = u_{xx} + u_{yy} - \frac{1}{r}v_r,$$

ossia

$$v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta} = u_{xx}(r\cos\theta, r\sin\theta) + u_{yy}(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

e quindi il nostro problema di Dirichlet si può riscrivere così:

$$\begin{cases} v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta} = 0 & r \in]0,R[,\ \theta \in [-\pi,\pi], \\ v(R,\theta) = f(\theta), & \theta \in [-\pi,\pi]. \end{cases}$$

Cerchiamo una soluzione sotto forma di serie di Fourier:

$$v(r,\theta) = \frac{a_0(r)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n(r)\cos n\theta + b_n(r)\sin n\theta\right],$$

con $a_0(r), a_n(r), b_n(r)$ funzioni di classe C^2. Formalmente, si ha

$$v_r(r,\theta) = \frac{a_0'(r)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n'(r)\cos n\theta + b_n'(r)\sin n\theta\right],$$

$$v_{rr}(r,\theta) = \frac{a_0''(r)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n''(r)\cos n\theta + b_n''(r)\sin n\theta\right],$$

$$v_\theta(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-n a_n(r)\sin n\theta + n b_n(r)\cos n\theta\right],$$

$$v_{\theta\theta}(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[n^2 a_n(r)\cos n\theta + n^2 b_n(r)\sin n\theta\right];$$

quindi, sempre formalmente, deve essere

$$\frac{1}{2}\left[a_0''(r) + \frac{1}{r}a_0'(r)\right] + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left[a_n''(r) + \frac{1}{r}a_n'(r) - \frac{n^2}{r^2}a_n(r)\right]\cos n\theta + \left[b_n''(r) + \frac{1}{r}b_n'(r) - \frac{n^2}{r^2}b_n(r)\right]\sin n\theta\right] = 0$$

e pertanto a_n e b_n soddisfano le equazioni differenziali ordinarie

$$a_n'' + \frac{1}{r}a_n' - \frac{n^2}{r^2}a_n = 0,\quad n \in \mathbb{N}; \qquad b_n'' + \frac{1}{r}b_n' - \frac{n^2}{r^2}b_n = 0,\quad n \in \mathbb{N}^+.$$

L' equazione $y'' + \frac{1}{r} y' - \frac{n^2}{r^2} y = 0$ ha soluzioni della forma r^α, con $\alpha \in \mathbb{R}$: sostituendo si trova

$$\alpha(\alpha-1) r^{\alpha-2} + \alpha r^{\alpha-2} - n^2 r^{\alpha-2} = 0,$$

da cui $\alpha^2 - n^2 = 0$ e pertanto $\alpha = \pm n$: quindi

$$y(r) = c_1 r^n + c_2 r^{-n}.$$

Però noi vogliamo funzioni continue anche per $r=0$: quindi

$$a_0(r) = A_0; \quad a_n(r) = A_n r^n, \quad b_n(r) = B_n r^n.$$

Sostituiamo nella formula per v:

$$v(r,\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n r^n \cos n\theta + B_n r^n \sin n\theta \right].$$

Imponiamo adesso, sempre formalmente, che $v(R,\theta) = f(\theta)$:

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n R^n \cos n\theta + B_n R^n \sin n\theta \right] = f(\theta)$$

e dunque occorre che, se f ha come serie di Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta \right],$$

risulti

$$A_n R^n = a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt, \quad B_n R^n = b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt,$$

cioè

$$v(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n\theta + b_n \left(\frac{r}{R}\right)^n \sin n\theta \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \left[\cos n\theta \cos nt + \sin n\theta \sin nt \right] \right] dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(\theta - t) \right] dt.$$

Questa è la soluzione formale del problema. Si può andare oltre:

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(\theta-t) = \frac{1}{2} + \mathrm{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{r}{R} e^{i(\theta-t)}\right]^n =$$

$$= \frac{1}{2} + \mathrm{Re} \frac{\frac{r}{R} e^{i(\theta-t)}}{1 - \frac{r}{R} e^{i(\theta-t)}} = \frac{1}{2} + \mathrm{Re} \frac{r e^{i(\theta-t)}}{R - r e^{i(\theta-t)}} \, \frac{R - r e^{-i(\theta-t)}}{R - r e^{-i(\theta-t)}} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{rR\cos(\theta-t) - r^2}{R^2 + r^2 - 2rR\cos(\theta-t)} =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{R^2 + r^2 \cancel{- 2rR\cos(\theta-t)} \cancel{+ 2rR\cos(\theta-t)} - 2r^2}{R^2 + r^2 - 2rR\cos(\theta-t)} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2rR\cos(\theta-t)},$$

e pertanto

$$v(r,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2rR\cos(\theta-t)} dt.$$

Questa formula si chiama integrale di Poisson ed è un modo di rappresentare la soluzione del nostro problema. Si vede che l'integrale è ben definito per $r<R$, e che si può derivare sotto il segno di integrale: quindi $v(r,\theta)$ risolve davvero l'equazione. Non banale è invece verificare che da questa formula segue $v(R,\theta) = f(\theta)$ [per $r \to R$ il denominatore diventa singolare per $t = \theta$].