Analisi 2 | Lu 25/5/15 | (1)

Esercizi

1. (i) Calcolare l'area del parallelogramma di $\mathbb{R}^5$ generato dai vettori $u=(0,1,2,3,4)$ e $v=(4,3,2,1,0)$;
   (ii) Calcolare il volume del parallelepipedo di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $u=(-1,0,1,-1)$, $v=(0,1,-1,-1)$, $w=(1,-1,-1,0)$.
2. (i) Sia $f_n(x)=\frac{1}{n^2x^2}\ln(1+n^3x^3)$, $x>0$. Analizzare la convergenza puntuale, in $L^1(0,\infty)$, in $L^2(0,\infty)$, uniforme. [R: conv. unif. in $[\delta,\infty[$ $\forall\delta>0$]
   (ii) Sia $f_n(x)=\sqrt[n]{e^{nx}+|x|^n}$, $x\in\mathbb{R}$. Analizzare la convergenza puntuale e uniforme in $\mathbb{R}$; $f_n\in L^1(\mathbb{R})$? $f_n\in L^2(\mathbb{R})$? [R: conv. unif. in $[-A,A]$ $\forall A>0$; NO; NO]
3. (i) $\lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{\sin(2x-2y)}{x-y}$, (ii) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\ln|xy|$, [R: 2; 0]

   (iii) $\lim_{(x,y)\to(1,0)}\left(\frac{1+y+x^2}{y}\right)^y$, (iv) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\ln(1+x^2y^2)}{x^6+y^2}$. [R: e^2; 0]

4. In quali punti $f(x,y)=|x-y|(x+y)$ ha le due derivate parziali?
5. (i) $f(x,y)=x(1+\sqrt{|\sin y|})$ è differenziabile in $(0,0)$? [SI]
   (ii) $f(x,y)=\sqrt{|x|-x}\sqrt{|\sin y|}$ è differenziabile in $(0,0)$? [NO]
6. Provare che $\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}y=\frac{x-y}{1+xy}$ per $xy\neq-1$.
7. Sia $f(x,y,z)=e^{x^2-z^2}(y+z)^2$. Scrivere ∇f e $\frac{\partial f}{\partial v}$, con $v=(3,1,2)$; scrivere

il piano tangente 3-dimensionale al grafico di f in $(1,1,1,f(1,1,1))$

8. Posto $Z=\{(x,y,z): e^{x^2-z^2}(y+z)^2=4\}$, mostrare che $(1,1,1)\in Z$ e scrivere il gradiente della funzione implicita $z=\varphi(x,y)$, il piano tangente a Z in $(1,1,1)$, la retta perpendicolare, il polinomio di Taylor di grado 2 per φ in $(1,1)$.

9. (i) Trovare il massimo e il minimo di $f(x,y)=|x-y|+2|x+y|$ in $[-1,1]^2$; [R: 4;0]

(ii) Trovare il massimo e il minimo di $f(x,y)=x^4-2xy^2-y$ in $A=\{(x,y): -1\le x\le 1,\ -1\le y\le x^4\}$. [R: 4; -2]

(iii) Trovare il massimo e il minimo di $f(x,y)=(4x-6y+3)\,e^{-\frac{4}{3}x+2y}$ in $A=\{x^2+2y^2\le 1\}$.

10. Sia $f(x,y)=(x^2-xy,\ x+y^2)$. Scrivere $Df(1,1)$, provare che f è un diffeomorfismo in un intorno di $(1,1)$. Scrivere $Df^{-1}(0,2)$.

$\left[\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\right]$

[Es.8: $\nabla\varphi(x,y)=\left(-\dfrac{x(y+\varphi)}{1-\varphi(y+\varphi)},\ -\dfrac{1}{1-\varphi(y+\varphi)}\right)$, $\varphi_{xx}(1,1)=-4$, $\varphi_{xy}(1,1)=-6$, $\varphi_{yy}(1,1)=-4$, $P(x,y)=1+2(x-1)+(y-1)-2(x-1)^2-3(x-1)(y-1)-2(y-1)^2$]

[Es 9(iii): un segmento di punti stazionari $\{y=\frac{2}{3}x\}\cap A$, nei quali $f=3$, tutti punti di max locale perché (*) $\frac{d}{dt}(3+t)e^{-t/3}\gtrless 0$ per $t\lessgtr 0$; sul bordo $y=\frac{2}{3}x$ cioè $x=\pm\frac{3}{\sqrt{17}}$, $y=\pm\frac{2}{\sqrt{17}}$, oppure $y=-\frac{3}{4}x$ cioè $x=\pm\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{17}}$, $y=\mp\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{17}}$ (+ minimo, − massimo per (*))]

11. Trovare la distanza massima e minima dei punti di $E=\{4x^2+y^2=4\}$ dalla retta $2x+y+10=0$.