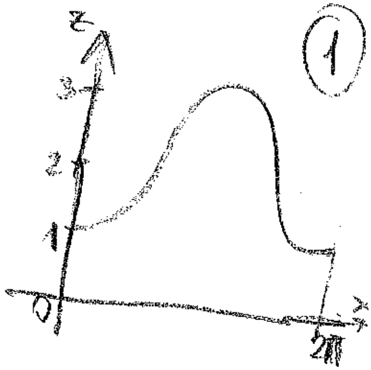
ANALISI 2 | gi 28/5/15

Esercizi:



1. Sia $f(x) = 2 - \cos x$, $0 \le x \le 2\pi$.

Siano $\Gamma = \{(x,z) : z = f(x)\}$, $D = \{(x,z) : 0 \le z \le f(x)\}$,

Σ = ruotato di Γ rispetto all'asse z,

E = ruotato di D rispetto all'asse z

Calcolare:

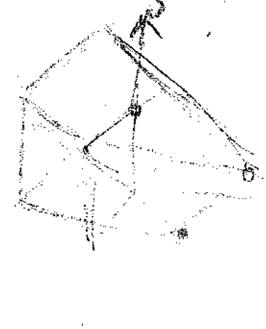
(i) $\int_\Gamma \cos x \, ds$, (ii) $\int_\Sigma \frac{2-z}{\sqrt{x^2+y^2}} d\sigma$, (iii) $\int_D x^2 y^2 \, dx\, dy\, dz$,

(iv) $\int_{+\Gamma} [xz\, dx - z^2 dz]$, (v) $\int_{+\Sigma} \langle \mathrm{rot} \begin{pmatrix} z^2 \\ x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}, \underline{n} \rangle \, d\sigma$

ove $+\Gamma$ è orientato secondo le x crescenti e $+\Sigma$ è orientato con $\underline{n} = (n_1, n_2, n_3)$ e $n_3 > 0$.

2. Sia $\Sigma = \{z = x - y, \ x, y \in [-1,1]\}$, orientata con $n_3 > 0$.

(i) $a(\Sigma)$, (ii) $\int_\Sigma \langle \mathrm{rot}\, \underline{F}(x,y,z), n \rangle \, d\sigma$, ove $\underline{F} = \begin{pmatrix} x^2 + 2y^2 \\ 2y^2 + 3z^2 \\ 3z^2 + x^2 \end{pmatrix}$.



Un tipo particolare di superficie: se $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ è una curva regolare, $\Gamma = \{\gamma(t),\ t \in [a,b]\}$, e $P = (x_0, y_0, z_0) \notin \Gamma$, definiamo

$$\Sigma = \{ (1-s) P + s\,\gamma(t) :\ s \in [0,1],\ t \in [a,b] \},$$

ossia

$$\sigma : \begin{cases} x = (1-s) x_0 + s\,\gamma_1(t) \\ y = (1-s) y_0 + s\,\gamma_2(t) \\ z = (1-s) z_0 + s\,\gamma_3(t) \end{cases} \qquad s \in [0,1],\ t \in [a,b].$$

Si ha

$$D\sigma = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) - x_0 & s\,\gamma_1'(t) \\ \gamma_2(t) - y_0 & s\,\gamma_2'(t) \\ \gamma_3(t) - z_0 & s\,\gamma_3'(t) \end{pmatrix},$$

e l'elemento d'area è

$$|\sigma_s \times \sigma_t|_3 = s\,|(\gamma(t) - P) \times \gamma'(t)|_3 .$$

Ad esempio, se γ è la curva piana

$$\gamma(t) = (t, t^2, 0), \qquad t \in [0, A]$$

e $P = (0,0,1)$, si ha

$$a(\Sigma) = \int_0^1 \int_0^A s \left| \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ t & t^2 & -1 \\ 1 & 2t & 0 \end{pmatrix} \right| dt\, ds =$$

$$= \int_0^1 s \int_0^A \sqrt{4t^2 + 1 + t^2}\ dt = \frac{1}{2} \int_0^A \sqrt{5 + t^2}\, dt =$$

$$= 5 \int_0^{A/\sqrt{5}} \sqrt{1+s^2}\, ds = \frac{A}{2}\sqrt{5 + A^2} + \frac{5}{2} \ln \frac{A + \sqrt{5 + A^2}}{\sqrt{5}} .$$