Analisi Matematica II, Anno Accademico 2014-2015
Ingegneria Edile, Civile, Ambientale
Paolo Acquistapace, Laura Cremaschi, Vincenzo M. Tortorelli
11 giugno 2015 - primo appello - gruppo A, prima parte (un'ora)

N. MATR./ANNO ISCR.		COGNOME	
DOCENTE/ CREDITI		NOME	

Istruzioni al fine della valutazione: *compilate l'intestazione in stampatello.*
Rispondete solo ai quesiti relativi ai rispettivi programmi: chi fa l'esame da 6 crediti risponderà solo ai quesiti contrassegnati con 6; chi ha il programma di Georgiev e Galatolo, o di De Pascale, risponderà solo ai quesiti contrassegnati con GG o D. Inoltre, chi ha il programma da 9 o 12 crediti, risponderà solo ai quesiti contrassegnati con 9 o 12.
Scrivete *solo le risposte* su questo foglio, *l'unico* da restituire; *ricopiate a parte*, se volete, le vostre risposte.

Esercizio 1 [9,12,GG] Sia $z \in \mathbb{R}^3$ e sia C una matrice 3×3, a coefficienti reali, invertibile. Determinare in funzione di z e C un elemento $u \in \mathbb{R}^3$ tale che si abbia, per ogni $x, y \in \mathbb{R}^3$,
$\langle u \cdot [Cx \times Cy] \rangle = \langle z \cdot [x \times y] \rangle.$ **u =**

Esercizio 2 (a) [9,12,GG] La serie di funzioni $\sum_{n=3}^{\infty} \left[\frac{1}{1+\sqrt{x}}\right]^n$ converge uniformemente nella semiretta $[1; +\infty[$? **(a)**
(b) [9,12] La serie converge in $L^1(]1; +\infty[)$? **(b)**

Esercizio 3 [6,9,12,GG,D] Calcolare il differenziale di $f(x,y) = \begin{cases} (x^2)^{y^2+1} & \text{se } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{se } x=y=0 \end{cases}$
nel punto $(0,0)$. **df(0,0)=**

Esercizio 4 [9,12,GG] Sia $f(x,y,z) = e^{xyz} - z\log(1+x^2y^2)$.
(a) calcolare $\frac{\partial^6 f}{\partial x^2\, \partial y^2\, \partial z^2}(0,0,0)$. **(a)**
(b) Detta $z = z(x,y)$ la funzione definita dall'equazione $f(x,y,z) = 1$ intorno al punto $(1,1,0)$, calcolare $\frac{\partial z}{\partial x}(1,1)$. **(b)**

Esercizio 5 [6,9,12,GG,D] Si determinino il valore massimo $\mathbf{V_M}$ e il valore minimo $\mathbf{V_m}$ per la funzione $f(x,y,z) = xz - zy$ sul vincolo dato dall'equazione $xy + x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
$\mathbf{V_M} =$ $\mathbf{V_m} =$

Esercizio 6 [6,9,12,GG,D] Calcolare l'integrale $I = \int_{0<x^2+y^2<z<1} e^{z-x^2-y^2}\, dxdydz$. **I =**

Esercizio 7 [6,9,12,GG,D] Calcolare l'area A della superficie costituita dai segmenti di estremi $(0,0,0)$ e $(t\cos t, t\sin t, t)$, con $0 \le t \le 1$. **A =**

Esercizio 8 [6,9,12,GG,D] Si consideri la 2-varietà $S = \{(x,y,z) : 1 \le z \le 2,\ z = \sqrt{x^2+y^2}\}$, con orientazione tale che il vettore normale nel suo punto $P = (1, 1, \sqrt{2})$ sia $(-1, -1, \sqrt{2})$. Disegnare in figura sopra bS (bordo di S) l'orientazione coerente con quella di S.

Esercizio 9 [12,GG] Determinare $a > 0$ tale che i coefficienti di Fourier su $[-\pi; \pi]$ della funzione $f(x) = x^2$ siano infinitesimi per $n \to \infty$ di ordine $1/n^a$. **a =**

Risoluzione - prima parte

Esercizio 1 Si ha per ogni $x, y \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}
\langle u \cdot [Cx \times Cy] \rangle &= \det (u|Cx|Cy) = \det \big(CC^{-1}u|Cx|Cy \big) = \det \big[C \left(C^{-1}u|x|y \right) \big] = \\
&= \det C \det \big(C^{-1}u|x|y \big) = (\det C) \langle C^{-1}u \cdot [x \times y] \rangle,
\end{aligned}$$

e dunque deve essere $z = (\det C) C^{-1} u$, ossia $u = \frac{1}{\det C}\, Cz$.

Esercizio 2 **(a)** Si tratta di una serie geometrica che converge puntualmente alla funzione

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{1+\sqrt{x}} \right]^n - 1 - \frac{1}{1+\sqrt{x}} - \frac{1}{[1+\sqrt{x}]^2} = \\
&= \frac{1}{1 - \frac{1}{1+\sqrt{x}}} - 1 - \frac{1}{1+\sqrt{x}} - \frac{1}{[1+\sqrt{x}]^2} = \frac{1}{\sqrt{x}[1+\sqrt{x}]^2};
\end{aligned}$$

notiamo fin d'ora che questa funzione è sommabile in $]1, \infty[$. La convergenza è anche uniforme perché

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{x\geq 1} \left| \sum_{n=3}^{N} \left[\frac{1}{1+\sqrt{x}} \right]^n - f(x) \right| = \lim_{N\to\infty} \sup_{x\geq 1} \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \left[\frac{1}{1+\sqrt{x}} \right]^n \right| \leq \lim_{N\to\infty} \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \right]^n \right| = 0.$$

Si noti che la convergenza è non solo uniforme, ma anche totale in $L^\infty(1, \infty)$.

(b) Per il teorema di B. Levi,

$$\sum_{n=3}^{\infty} \int_1^\infty \left[\frac{1}{1+\sqrt{x}} \right]^n dx = \int_1^\infty \sum_{n=3}^{\infty} \left[\frac{1}{1+\sqrt{x}} \right]^n dx = \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}[1+\sqrt{x}]^2}\, dx < \infty;$$

quindi c'è convergenza totale in $L^1(1, \infty)$. Ne segue la tesi.

Esercizio 3 Poiché, per $x^2 + y^2 \to 0$,

$$|f(x,y)| = x^2 e^{y^2 \ln x^2} \leq x^2 = \mathrm{o}(\sqrt{x^2+y^2}),$$

si ha $df(0,0) = (0,0)$.

Esercizio 4 **(a)** Poiché per $(x,y,z) \to (0,0,0)$ si ha

$$\begin{aligned}
&e^{xyz} = 1 + xyz + \tfrac{x^2y^2z^2}{2} + \mathrm{o}([\sqrt{x^2+y^2}]^6), \\
&z \log(1 + x^2y^2) = zx^2y^2 + \mathrm{o}([\sqrt{x^2+y^2}]^8),
\end{aligned}$$

si ottiene per $(x,y,z) \to (0,0,0)$

$$f(x,y,z) = 1 + xyz - zx^2y^2 + \frac{x^2y^2z^2}{2} + \mathrm{o}([\sqrt{x^2+y^2}]^6);$$

in particolare il polinomio di Taylor di f di grado 6 nell'origine è

$$P_6(x,y,z) = 1 + xyz - zx^2y^2 + \frac{1}{2}\, x^2y^2z^2,$$

cosicché

$$\frac{1}{2!\,2!\,2!}\,\frac{\partial^6 f}{\partial x^2\,\partial y^2\,\partial z^2}(0,0,0)=\frac{1}{2},$$

ossia

$$\frac{\partial^6 f}{\partial x^2\,\partial y^2\,\partial z^2}(0,0,0)=4.$$

(b) La funzione implicita $z(x,y)$ verifica, per il teorema del Dini,

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)=-\frac{f_x(x,y,z(x,y))}{f_z(x,y,z(x,y))}=-\frac{yz\,e^{xyz}+\frac{2zx}{1+x^2y^2}}{xy\,e^{xyz}-\log(1+x^2y^2)},$$

e nel punto $(1,1)$, essendo $z(1,1)=0$, si ha

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,1)=0.$$

Esercizio 5 Si tratta di un problema di minimo e massimo vincolato con funzioni omogenee di grado 2. Con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange dobbiamo annullare il gradiente di $f-\lambda g$, ottenendo in questo caso il sistema

$$\begin{cases} z-\lambda y-2\lambda x=0\\ -z-\lambda x-2\lambda y=0\\ x-y-2\lambda z=0\\ xy+x^2+y^2+z^2=1. \end{cases}$$

In particolare, dalle prime tre equazioni si ha

$$\langle (x,y,z)\cdot[\nabla f(x,y,z)-\lambda\nabla g(x,y,z)]\rangle_3=0,$$

e in virtù del teorema di Eulero per le funzioni omogenee, nonché della quarta equazione,

$$2f(x,y,z)-2\lambda g(x,y,z)=2f(x,y,z)-2\lambda=0.$$

Quindi, in ciascun punto stazionario (x,y,z,λ), λ è il valore assunto da f nel punto. Per trovare λ, riscriviamo le prime tre equazioni, che sono lineari, in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} -2\lambda & -\lambda & 1\\ -\lambda & -2\lambda & -1\\ 1 & -1 & -2\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

e osserviamo che cerchiamo soluzioni (x,y,z) diverse da $(0,0,0)$, poiché $(0,0,0)$ non appartiene al vincolo. Quindi dobbiamo imporre che

$$\det\begin{pmatrix} -2\lambda & -\lambda & 1\\ -\lambda & -2\lambda & -1\\ 1 & -1 & -2\lambda \end{pmatrix}=6\lambda(1-\lambda^2)=0,$$

il che ci fornisce $\lambda=1$, $\lambda=-1$ e $\lambda=0$. A noi interessano i valori massimo e minimo di λ, e quindi si conclude che

$$V_m=-1,\qquad V_M=1.$$

Esercizio 6 L'insieme di integrazione T si descrive come

$$T = \{(x, y, z) : \; x^2 + y^2 < 1, \; x^2 + y^2 < z < 1\};$$

Usando le coordinate cilindriche si ha, con facili calcoli,

$$\begin{aligned}
\int_T e^{z-x^2-y^2}\, dxdydz &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^1 e^{z-r^2} r\, dzdrd\vartheta = \\
&= 2\pi \int_0^1 r\left[e^{z-r^2}\right]_{r^2}^1 dr = 2\pi\int_0^1 r(e^{1-r^2}-1)dr = \pi(e-2).
\end{aligned}$$

Esercizio 7 La superficie S proposta si descrive così:

$$\begin{cases} x = s\,t\,\cos t \\ y = s\,t\,\sin t \\ z = s\,t, \end{cases} \qquad s \in [0,1], \; t \in [0,1].$$

Detta σ questa applicazione, si ha

$$D\sigma = \begin{pmatrix} t\,\cos t & -s\,t\,\sin t \\ t\,\sin t & s\,t\,\cos t \\ t & s \end{pmatrix},$$

da cui

$$E = |\sigma_s|^2 = 2t^2, \qquad G = |\sigma_t|^2 = s^2(t^2+1), \qquad F = \langle \sigma_s \cdot \sigma_t\rangle = st.$$

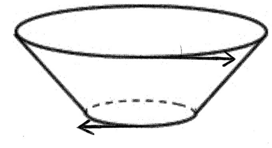
Perciò l'elemento d'area è

$$d\sigma = \sqrt{2t^2s^2(t^2+1) - s^2t^2} = s\,t\sqrt{1+2t^2}\, dsdt.$$

Dunque

$$\begin{aligned}
a(S) &= \int_0^1\int_0^1 s\,t\sqrt{1+2t^2}\, dsdt = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 t\sqrt{1+2t^2}\, dt = \frac{1}{8}\int_0^2 \sqrt{1+u}\, du = \frac{1}{12}(3^{\frac{3}{2}}-1).
\end{aligned}$$

Esercizio 8 Le orientazioni corrette sono disegnate qui a fianco.



Esercizio 9 I coefficienti di Fourier di f relativi ai seni sono nulli, essendo f pari. Per quelli dei coseni, si ha, integrando per parti,

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,\cos nx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,\cos nx\, dx = \frac{2}{\pi n}\left[x^2\sin nx\right]_0^{\pi} - \frac{4}{\pi n}\int_0^{\pi} x\sin nx\, dx = \\
&= 0 + \frac{4}{\pi n^2}\left[x\cos nx\right]_0^{\pi} - \frac{4}{\pi n^2}\int_0^{\pi}\cos nx\, dx = \frac{4}{\pi n^2}\left[x\cos nx\right]_0^{\pi} + 0 = \frac{4(-1)^n}{n^2}.
\end{aligned}$$

Pertanto a_n è infinitesimo per $n \to \infty$ di ordine $\frac{1}{n^2}$.