

ESERCIZI DI CALCOLO NUMERICO

La concentrazione di una certa tossina in un sistema di laghi situati in un'area industriale è stata monitorata ad intervalli di tempo nel periodo 1978–1992 come mostrato nella tabella riportata di seguito:

year	toxin
1978	12
1980	12.7
1982	13
1984	15.2
1986	18.2
1988	19.8
1990	24.1
1992	28.1

1. Interpolare i dati utilizzando la forma di Lagrange del polinomio di interpolazione. Tracciare il grafico del polinomio mediante il comando `plot`. Utilizzare il polinomio per predire il valore della tossina nell'anno 1994.
2. L'interpolazione polinomiale potrebbe essere usata anche per riempire dei "buchi" nei dati. Supponiamo di non disporre delle misurazioni per gli anni 1982 e 1984. Determinare il polinomio di interpolazione sui dati rimanenti e calcolare le predizioni mancanti.
3. Per risolvere il punto precedente considerare il seguente approccio alternativo. Determinare una funzione polinomiale a tratti $s(t)$ definita come

$$s(t) = \begin{cases} s_1(t) & \text{per } t \in [t_0, t_1] = [1978, 1980]; \\ s_2(t) & \text{per } t \in [t_1, t_2] = [1980, 1986]; \\ s_3(t) & \text{per } t \in [t_2, t_3] = [1986, 1988]; \\ s_4(t) & \text{per } t \in [t_3, t_4] = [1988, 1990]; \\ s_5(t) & \text{per } t \in [t_4, t_5] = [1990, 1992]; \end{cases}$$

con $s_i(t) = a_i + b_i t + c_i t^2 + d_i t^3$, $1 \leq i \leq 5$, e i coefficienti a_i, b_i, c_i, d_i determinati imponendo le condizioni di interpolazione $s_i(t_{i-1}) = y_{i-1}$ e $s_i(t_i) = y_i$ con y_i il valore della tossina al tempo t_i , $1 \leq i \leq 5$, le condizioni di raccordo $s'_i(t_i) = s'_{i+1}(t_i)$ e $s''_i(t_i) = s''_{i+1}(t_i)$, $1 \leq i \leq 4$ e le due condizioni aggiuntive $s''_1(t_0) = s''_5(t_5) = 0$. Risolvere il sistema lineare nelle incognite a_i, b_i, c_i, d_i , $1 \leq i \leq 5$. Tracciare un grafico di $s(x)$ e calcolare $s(1982)$ e $s(1984)$.