# CALCOLO NUMERICO
# Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
# A.A. 2015/2016 – Appello 09/09/2016

| NOME | COGNOME | MATRICOLA |
|---|---|---|

**Esercizio 1** Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geq 2$, definita da

$$A = (a_{i,j}) = \begin{cases} 1 \text{ se } j = i; \\ \gamma_i \in \mathbb{R} \text{ se } j = i+1; \\ \gamma_n \in \mathbb{R} \text{ se } i = n, j = 1; \\ 0 \text{ altrimenti.} \end{cases},$$

Sia inoltre $M$ la parte triangolare superiore di $A$ ed $N = M - A$. Per $n = 3$ si ha

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \gamma_1 & 0 \\ 0 & 1 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & \gamma_1 & 0 \\ 0 & 1 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\gamma_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Per la risoluzione del sistema lineare $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ si considera il metodo iterativo definito dal partizionamento $A = M - N$.

1. Determinare la matrice di iterazione del metodo.

2. Dire motivando la risposta se le seguenti affermazioni sono vere o false:

   (a) Se $A$ è predominante diagonale allora il metodo iterativo è convergente.

   (b) Il metodo iterativo è convergente se e solo se $A$ è predominante diagonale.

   (c) Il metodo iterativo è convergente se e solo se vale $\prod_{i=1}^{n} |\gamma_i| < 1$.

3. Scrivere una funzione Matlab® che dati in input $\boldsymbol{b} = (b_i) \in \mathbb{R}^n$, $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ e $tol \in \mathbb{R}$, implementa il metodo iterativo per la risoluzione del sistema lineare $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ con vettore iniziale $\boldsymbol{x}_0$ arrestandosi quando $\| \boldsymbol{x}_{k-1} - \boldsymbol{x}_k \|_\infty \leq tol$ e restituendo in uscita $\boldsymbol{x}_k$ e $k$. L'implementazione non deve richiedere memorizzazioni e/o inversioni di matrici e deve avere costo computazionale lineare per iterazione.

4. Per $n \in \{64, 128, 512\}$, $tol = 10^{-12}$, $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{0}$, $\gamma_i = i/(i+1)$, $b_i = 1$, $1 \leq i \leq n$, riportare il numero di iterazioni eseguite dal metodo. Osservato che il numero di iterazioni decresce al crescere della dimensione si giustifichi tale comportamento.