

ESERCIZI DI CALCOLO NUMERICO

Esercizio

1. Si scrivano 2 programmi in Matlab per il calcolo delle funzioni $f_i: \mathbb{N} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ e $f_s: \mathbb{N} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definite da

$$f_i(n, \ell) = \sum_{k=1}^n x_k^2 (x_{k+1} - x_k), \quad f_s(n, \ell) = \sum_{k=1}^n x_{k+1}^2 (x_{k+1} - x_k),$$

ove $x_k = (k-1)\ell/n$ per $1 \leq k \leq n+1$.

2. Si calcoli $f_s(10000, 2)$ utilizzando

$$f_s(10000, 2) = \sum_{k=1}^{10000} x_{k+1}^2 (x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=1}^{10000} x_{k+1}^2 \frac{\ell}{10000}.$$

Riportare i risultati ottenuti ed il corrispondente errore relativo. Si notano differenze significative nei valori calcolati? Perché?

3. Si mostri sperimentalmente e/o teoricamente che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_i(n, \ell) = s(\ell) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_s(n, \ell).$$

Cosa rappresenta $s(\ell)$?

4. Per studiare la convergenza del processo di approssimazione di $s(\ell)$ fissare un valore di ℓ , ad esempio $\ell = 2$, e plottare la funzione

$$g_\ell(k) = (f_s(k \cdot 10000, \ell) - f_i(k \cdot 10000, \ell)) \cdot (k \cdot 10000),$$

per i valori di k compresi tra 1 e 20. Riportare il grafico ottenuto. Cosa si deduce dal grafico?

5. Infine calcolare il vettore $b \in \mathbb{R}^{10}$ con componenti $b(j) = g_j(20)$, $1 \leq j \leq 10$. Riportare il vettore calcolato. Cosa si deduce riguardo il $\lim_{k \rightarrow +\infty} g_\ell(k)$?
6. Provare a dimostrare formalmente la congettura avanzata.