Analisi Matematica II, Anno Accademico 2017-2018.
Ingegneria Edile e Architettura
Vincenzo M. Tortorelli
FOGLIO DI ESERCIZI n. 1
STUDI ELEMENTARI DI FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI REALI
A VALORI IN SPAZI CARTESIANI

ESERCIZIO n.1 Si disegnino in maniera approssimativa i sottoinsiemi dal piano definiti da $\big\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\ :\ f(x,y)=f(a,b)\ \big\}$, al variare di f e di (a,b) nei casi seguenti:

x^2-y^2, $(2,-1)$; y^3-x^2, $(0,0)$; $(y-x^2)^2-x^4$, $(0,0)$; $\frac{x-y}{x+y}$, $(1,1)$; $\cos\frac{x}{y}$, $(\pi,4)$;
e^{xy}, $(2,0)$; $\frac{x}{x^2+y^2}$, $(1,2)$.

ESERCIZIO n. 2 Per le seguenti funzioni si disegnino gli insiemi di livello
$\{(x,y): f(x,y)=1\}$, $\{(x,y,z): f(x,y,z)=1\}$.

a) $f(x,y)=x^2+y^2$;
b) $f(x,y)=|x|+|y|$;
c) $f(x,y)=\max\{|x|,|y|\}$;
d) $f(x,y)=(|x|^p+|y|^p)^{\frac{1}{p}}$ al variare di $p>1$;
e) $f(x,y)=(|x|^p+|y|^p)^{\frac{1}{p}}$ al variare di $p\in]0;1[$;
f) $f(x,y,z)=|x|+|y|+|z|$;
g) $f(x,y)=\log(e\cdot\mathrm{artan}(x^2+y^2-4))$.

ESERCIZIO n. 3 Si provi, per $x,\ y\ge 0$, che $\arctan(x+y)\le\arctan x+\arctan y$.

ESERCIZIO n. 4 Si disegnino in modo approssimativo i sottoinsiemi di $\mathbf{R}^3$:

$\{(x,y,z):\ 2=3x+5y+7z\}$;
$\{(x,y,z):\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+z^2=121\}$; $\{(x,y,z):\ (2x-10)^2+9y^2+z^2\ge 111\}$;
$\{(x,y,z):\ z=x^2+y^2\}$; $\{(x,y,z): x^2-y^2=z\}$;
$\{(x,y,z): x^2+y^2-z^2\le 1\}$; $\{(x,y,z): x^2+y^2-z^2\le -1\}$;
$\{(x,y,z):\ x^2-y^2=z^2\}$; $\{(x,y,z):\ z^2=x^2+y^2\}$;
$\{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2-6\sqrt{x^2+y^2}+5=0\}$; $\{(x,y,z): \sqrt{x^2+y^2}=\cosh z\}$;
$\{(x,y,z):\ |x|+|y|+|z|=1\}$; $\{(x,y,z):\ \max\{|x|,|y|,|z|\}\le 1\ \}$.

ESERCIZIO n.5 Si studi l'immagine delle seguenti funzioni:
$t\in\mathbf{R}\mapsto(\sin 2t,\cos 2t)$, $t\in\mathbf{R}\mapsto(t^2,t^3)$, $t\in\mathbf{R}\mapsto(t\cos t,t\sin t)$, $t\in\mathbf{R}\mapsto(\cos t,\sin t,t)$,
$t\in[2;3[\mapsto(t+1,2t+3,3t+4)$, $(s,t)\in\mathbf{R}^2\mapsto(s,t,s+t)$, $(s,t)\in\mathbf{R}^2\mapsto(s,t,s^2+t^2)$.

ESERCIZIO n. 6 Determinare e rappresentare graficamente il dominio di definizione D delle seguenti funzioni:

a) $f(x,y)=\sqrt{\frac{x^2+21y^2-10xy}{x+4y}}$, $f:D\subset\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$; b) $f(x,y,z)=\log\frac{x^2+y^2-1}{x+y+z}$, $f:D\subset\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$;
c) $f(x,y,z)=\Big(\mathrm{artan}\frac{x+y-z}{y(x^2-4)},\mathrm{arsin}(x^2-y^2-z^2)\Big)$ $f:D\subset\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^2$.
d) $f(t)=(\cos 2t+2\cos t,2\sin t,\sin 2t)$, $f:D\subset\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2$

ESERCIZIO n. 7 a) Quale delle funzioni del precedente esercizio è limitata?

b) Quale è iniettiva? c) Quale surgettiva?

ESERCIZIO n. 8 Si dia un'idea saliente del comportamento dei grafici delle seguenti funzioni:

a) $f(x, y) = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y$.

b) $g(x, y) = (f(x, y))^4$.

c) $h(x, y) = xy^2$.

ESERCIZIO n. 9 [Teorico] Data $f(x, y, z) = (X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z)) =: (x^3, y^3, z^3)$

a) La funzione è bigettiva da $\mathbf{R}^3$ in sé. Se nel sistema di coordinate usuale un punto corrisponde a $(1, 2, 3)$ quali sono le coordinate nel sistema non lineare (X, Y, Z)?
b) Si consideri la legge oraria $\gamma(t) = t(1, 2, 3)$ (retta parametrica) nell'usuale sistema di coordinate. Qual'è la velocità nel nuovo sistema di coordinate?
c) Si consideri il lavoro compiuto dalla forza espressa nelle coordinate (X, Y, Z) dalla terna costante $(1, 2, 3)$ su una generica traiettoria di legge oraria, espressa sempre in questo sistema di coordinate da $A(t) = (U(t), V(t), W(t))$. Nelle coordinate usuali (x, y, z) come si esprime il lavoro di questa forza lungo la traiettoria di legge oraria espressa nelle stesse coordinate da $a(t) = (u(t), v(t), w(t))$?

ESERCIZIO n. 10 [Impegnativo] In $\mathbf{R}^3$ vi è qualche retta per l'origine, identifcata dal suo piano ortogonale Π di equazione $ax + by + cx = 0$, rispetto alla quale la traiettoria (sostegno o immagine) di legge oraria $\gamma(s) = (s + s^4, s - s^4, s + s\sin s)$ sia grafico di una funzione $f : \mathbf{R} \to \Pi$?

ESERCIZIO n. 11 Si trovi, come luogo di zeri, il piano tangente al grafico della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$ nel punto $(1, 1, 2)$.

ESERCIZIO n. 12 Si considerino le due leggi orarie $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$ e $\beta(t) = (\cos t, 2\sin t, 3t)$. Calcolare la derivata rispetto a t (velocità) della legge oraria $\alpha(t) \times \beta(t)$.

ESERCIZIO n. 13 Si consideri $f(x, y) = (X(x, y), Y(x, y)) =: (x^3 - y, y^3 + x)$, $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$.

a) Si verifichi che f è iniettiva e surgettiva.

b) Si disegnino i generici insiemi di livello delle funzioni X ed Y componenti della funzione vettoriale f.

ESERCIZIO n. 14 a- La funzione $f(x, y) = \binom{x-yx}{2xy}$ da $\mathbf{R}^2$ in se è iniettiva? È surgettiva?
b- Sia $f(x, y) = \binom{x^2+y^2}{2xy} = (u, v)$: si studi l'immagine di f, si studi al variare di (u, v) come sono fatte le fibre $f^{-1}\{(u, v)\}$.

ESERCIZIO n. 15 Si consideri $f(x, y) = (X(x, y), Y(x, y)) =: (y - x^2, y - e^{2x} - 2x)$

a) La funzione è bigettiva da $\mathbf{R}^2$ in sé? b) Si disegnino gli insiemi di livello di $X + Y$.

ESERCIZIO n.16 Trovare i valori di massimo e minimo, se esistono, della funzione $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$ sul dominio definito da $|x| + |y| \leq 1$.

ESERCIZIO n. 17 Trovare i valori di massimo e minimo, se esistono, della funzione $f(x, y) = \log(x + y)$ sul cerchio di centro l'origine e raggio 2.

ESERCIZIO n. 18 Trovare i valori di massimo e minimo, se esistono, della funzione $f(x, y, z) = |x - yz|$ sul cubo $[0, 1]^3 = \{(x, y, z) : 0 \leq x,\ y,\ z \leq 1\}$.

ESERCIZIO n. 19 Trovare una parametrizzazione per l'intersezione dei grafici delle funzioni $f(x, y) = 3-x^2-2y^2$ e $g(x, y) = x^2+y^2$, (cioè trovare una funzione che abbia tale intersezione come immagine).

ESERCIZIO n. 20 Si trovino, se esistono, i punti di massimo e minimo assoluto sulla sfera unitaria di centro l'origine della funzione distanza dalla retta (in forma parametrica) $t(1, 2, 3) + (4, 5, 6)$, $t \in \mathbf{R}$.

ESERCIZIO n. 21 Si trovi la minima distanza del punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ dal grafico (t, t^2), $t \in \mathbf{R}$.
