Analisi Matematica II, Anno Accademico 2017-2018.
Ingegneria Edile e Architettura
Vincenzo M. Tortorelli
FOGLIO DI ESERCIZI n. 2
CAMMINI

ESERCIZIO 1 Un cammino soddisfa le relazioni $y = x^2 - z,\ z = y^2 + x^3$, essendo la componente verticale della velocità z' costante eguale ad 1. Qual'è la sua velocità nel punto $(1, -1, 2)$?

ESERCIZIO 2 Si consideri il cammino $\gamma(t) = (t^2 + t, t^4 + t)$.
a- È regolare? È semplice?
b- Per quale dei seguenti intervalli il sostegno della sua restrizione è una 1-varietà:
$[0; 1]$, $(-1; 1)$, $(-\infty; 1)$, $(-\infty; 0]$, $(0; +\infty)$?
c- Per quali $a,\ b$ l' unione tra il sostegno della sua restrizione per $t \in]0; 1]$, e
$\{(x, y) : \sqrt{y-2} - a\sqrt{x-2} + b = 0\}$ è una 1-varietà sostegno di un'unica curva?

ESERCIZIO 3 Si consideri il sottoinsieme E di $\mathbf{R}^3$ definito da $yz + x = 1$ e $xz - x = 1$.
a) È limitato? È chiuso?
b) È una 1-varietà?
c) Si determinino le sue proiezioni sugli assi coordinati.
Si può trovare un cammino che abbia E come sostegno?

ESERCIZIO 4 a- Si scriva l'equazione del piano ortogonale nel punto $(0, 0, 1)$ al sostegno del cammino $(t^2, \sin t^2, \cos t^2)$.
b- Si calcolino le lunghezze del cammino e del suo sostegno per $t \in [-2; 1]$.

ESERCIZIO 5 Siano $a \in \mathbf{R}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ a & 1 & a \end{pmatrix}$, $M(t)$ il cammino a valori matrici 3×3 per cui $\begin{cases} M'(t) = AM(t) \\ M(0) = Id \end{cases}$. Ovvero le colonne $M^1(t)$, $M^2(t)$, $M^3(t)$, sono cammini ${}^t(x(t), y(t), z(t))$ che verificano il sistema $\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) + z(t) \\ y'(t) = x(t) - 2y(t) + z(t) \\ z'(t) = ax(t) + y(t) + az(t) \end{cases} =: A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$,
ed inoltre $M^1(0) = {}^t(1, 0, 0)$,$M^2(0) = {}^t(0, 1, 0)$, $M^3(0) = {}^t(0, 0, 1)$.
Per quali $a \in \mathbf{R}$ il volume del tetraedro di spigoli M^1, M^2, M^3 è infinitesimo per $t \to +\infty$?

ESERCIZIO 6 [Co-anomalia] Dato un cammino piano $\gamma(t) = (x(t), y(t)),\ t \in [a; b)$ derivabile con continuità, e non nullo (non passante per l'origine), si consideri il sistema di riferimento dipendente da $t \in [a; b)$: di origine $\gamma(t)$, ed assi il versore posizione $\hat{r}(t) = \hat{r}(\gamma(t))$ e il suo ortogonale $\hat{\theta}(t)$ in modo che $det(\hat{r}, \hat{\theta}) = 1$.

a- Si calcoli la derivata di $|\gamma(t)|$.

b- [Impegnativo] Si trovi, in termini di γ e γ', una funzione $\Theta(t)$ per cui $\hat{r} = (\cos\Theta, \sin\Theta)$.

c - Che relazione essa ha con le coordinate polari?

d- Quando γ è equivalente ad un cammino $\tilde{\gamma}(\vartheta) =: (f(\vartheta)\cos\vartheta, f(\vartheta)\sin\vartheta),\ \vartheta \in Im\Theta$?

e- Nel casi si esprima la lunghezza di γ come integrale in ϑ.

ESERCIZIO 7 a- Per $a \in \mathbf{R}$ sia dato un cammino $\gamma(\vartheta) = (\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta)$, in termini della seguente relazione tra raggio e co-anomalia $\vartheta^a\rho = 1$, $\vartheta > 0$. Si fissi $\theta_0 > 0$.

- Per quali $a \in R$ il cammino ha lunghezza finita per $\vartheta \leq \theta_0$?
- Per quali $a \in R$ il cammino interseca infinite volte il segmento $[0; 1]$ sull'asse delle ascisse?
- Per quali $a \in R$ il cammino ha lunghezza finita per $\vartheta \geq \theta_0$?

b- Si calcoli la lunghezza del cammino definito tramite la relazione tra raggio e co-anomalia $e^{\vartheta}\rho = 1,\ \ \vartheta \geq \frac{\pi}{4}$.

ESERCIZIO 8 a- Calcolare la lunghezza dell'elica con parametrizzazione regolare semplice $(\cos t, \sin t, t),\ t \in [0; 2\pi]$.
b- Se la densità di massa lungo il sostegno è data da $f(x, y, z) = 4 - z - xy$ si calcoli la massa e il centro di massa.

ESERCIZIO 9 Si consideri l'intersezione dei sottoinsimei di $\mathbf{R}^3$ definite da $z = x^2 + y^2$, $x + y + z = 1$. Si mostri che è il sostegno di un cammino γ trovando una parametrizzazione regolare. Quindi si calcoli l'integrale $\displaystyle\int_\gamma |(2x+1)^2 - (2y+1)^2|\, ds$

ESERCIZIO 10 Si consideri in $\mathbf{R}^2$ il campo vettoriale $V = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$, ovvero considerando $\hat{r}(x, y)$ il versore posizione, $\hat{\theta}(x, y)$ quello ortogonale per cui $det(\hat{r}, \hat{\theta}) = 1$ e $\rho(x, y)$ la distanza dall'origine, $V = \dfrac{\hat{\theta}}{\rho}$.

-Si calcoli $\displaystyle\int_{E,T} V$ nei seguenti casi: E la circonferenza di centro l'origine e raggio R orientata in senso antiorario da $T(x, y) = \dfrac{1}{R}(-y, x)$, E il quadrato $\max\{|x|, |y|\} = 1$ orientato "a tratti" in senso antiorario dai versori dei suoi lati.

- Si calcoli $\displaystyle\int_\gamma V$ per: $\gamma(t) = (\cos t, \sin t),\ t \in [12\pi; 38\pi]$.

ESERCIZIO 11 Calcolare il lavoro del campo di forze

$$F = \left(\frac{x}{1+x^2+y^2+z^2}, \frac{y}{1+x^2+y^2+z^2}, \frac{z}{1+x^2+y^2+z^2}\right)$$

su una particella che si muova con legge oraria $\gamma(t) = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t, 1 - e^{-t}),\ t \geq 0$.

ESERCIZIO 12 Si consideri la curva Γ data da

$$\begin{cases} x = \sin t \sin 2t \\ y = \sin t \cos 2t \qquad\qquad t \in [0, 2\pi]. \\ z = 2t, \end{cases}$$

(i) Si calcoli l'integrale $\displaystyle\int_\Gamma \sqrt{5 + 3(x^2 + y^2)}\, ds$.

(ii) Si calcoli il lavoro compiuto lungo Γ, orientata nel verso delle t crescenti, dal campo

$$\mathbf{V}(x, y, z) = \left(\frac{y}{x^2 + y^2}, -\frac{x}{x^2 + y^2}, 2 \right).$$

ESERCIZIO 13 Si consideri la curva Γ data da

$$\begin{cases} x = \sin t \cos 2t \\ y = \sin t \sin 2t \qquad\qquad t \in [0, 2\pi]. \\ z = \cos t, \end{cases}$$

- Si calcoli l'integrale $\displaystyle\int_\Gamma \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\, ds$.
- Si calcoli il lavoro compiuto lungo Γ, orientata nel verso delle t crescenti, dal campo

$$\mathbf{V}(x, y, z) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right).$$

ESERCIZIO 14 Sia Γ il cammino piano descritto in coordinate polari, (r, ϑ), dall'equazione:

$$r = 6(1 + \cos \vartheta), \qquad -\pi \le \vartheta \le \pi.$$

- Si scriva l'equazione della retta tangente a Γ nel punto $\Big(3(\sqrt{2} + 1), 3(\sqrt{2} + 1)\Big)$.
- Si determini la lunghezza di Γ.

Esercizio 15 Sia Γ la curva descritta, in coordinate polari, dall'equazione

$$r = \vartheta^2, \qquad 0 \le \vartheta \le 2\pi,$$

orientata nel verso delle ϑ crescenti.

(i) Si determini la lunghezza di Γ.

(ii) Si calcoli il lavoro compiuto lungo Γ dal campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right).$$

ESERCIZIO 16 Si integri il campo $V = (x^3 + y^4, x^4 + y^3)$ sul cammino chiuso definito dall'equazione $x^2 + 4y^2 = 4$ e percorso in senso antiorario.

ESERCIZIO 17 Per $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ con $x^2 + y^2 \neq 0$, si consideri il sistema ortonormale centrato in $\mathbf{x}$: $\hat{r}(\mathbf{x})$ versore posizione, $\hat{\phi}(\mathbf{x})$ tangente al "parallelo" in "senso antiorario", $\hat{\theta}(\mathbf{x})$ tangente al "meridiano" verso "nord".

Rispettivamente, in coordinate sferiche $(r, \varphi, \vartheta) \in \mathbf{R}^+ \times [0; 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$:

$\hat{r} = (\cos\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta\sin\varphi, \sin\vartheta)$, $\hat{\phi} = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$, $\hat{\theta} = (-\sin\vartheta\cos\varphi, -\sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta)$.

Dato $\beta \in (0; \frac{\pi}{2})$ si assume che vi è un unico cammino definito su un opportuno intervallo aperto $I = \left(-\dfrac{L}{2}; \dfrac{L}{2}\right)$ per cui:
$$\begin{cases} \gamma'(t) = \cos\beta\ \hat{\phi}(\gamma(t)) + \sin\beta\ \hat{\theta}(\gamma(t)) \ , \quad t \in I \\ \gamma(0) = (1, 0, 0) \ , \quad \lim_{t \to \pm\frac{L}{2}^{\mp}} \gamma(t) = (0, 0, \pm 1) \end{cases}$$

(a)- Si mostri che $\gamma(t)$ sta sulla sfera unitaria di $\mathbf{R}^3$ (tranne i poli $z^2 \neq 1$): $\forall t \in I |\gamma(t)| = 1$;

- si interpreti cinematicamente l'equazione (lossodromia).

(b) - Trovate le relazioni tra ϑ', φ', ϑ, φ, β, supponendo di usare la latitudine ϑ come parametro, calcolare la lunghezza del cammino, e quindi determinare l'intervallo I.

- Parametrizzare rispetto alla latitudine. [Può servire: $2\displaystyle\int \frac{dw}{\cos w} = \log\frac{1 + \sin w}{1 - \sin w} + c$]

(c) - Integrare il campo piano solenoidale $V(x, y, z) = \dfrac{(-y, x, 0)}{x^2 + y^2}$ lungo $\gamma(t)$, per $t > 0$.

- Si integri V anche sui cammini $(\cos 2t, \sin 2t, t)$, $(\cos 3t, \sin 3t, t)$, ... per $t \in [0; 2\pi]$.

- Quanti "giri fa" la lossodromia attorno all'asse verticale per $t > 0$?

ESERCIZIO 18 Dato $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$, si consideri il cammino regolare, 2π-periodico, nello spazio $\quad \gamma_n(t) = (\cos t\cos nt, \cos t\sin nt, \sin t)$, $\ t \in \mathbf{R}$.

(a)- Si integri il campo solenoidale $V(x, y, z) = \dfrac{(-y, x, 0)}{x^2 + y^2}$ lungo il cammino γ_n su $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

- Lo si integri sui cammini:

$(\cos t, \sin t, t)\big|_{[0;2\pi]}$, $(\cos t, \sin t, t)\big|_{[0;\pi]} \oplus (\cos t, 0, t)\big|_{[\pi;2\pi]}$ e $(1 + \cos t, \sin t, 2t)\big|_{[0;\pi]}$.

- Quanti "giri fa" attorno all'asse verticale $\gamma_n(t)$ per $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$?

(b) - Provare che: per $n \in \mathbf{N}$ dispari vi è simmetria rispetto al piano "orizzontale" definito da $z = 0$, per $n \in \mathbf{N}$ pari simmetria centrale.[In entrmbi i casi è utile osservare che cambia il segno della terza componente]

- Al variare di $n \in \mathbf{N}$ si esplicitino le velocità di passaggio al "polo nord" $(0, 0, 1)$,

- si determinino quindi i piani di simmetria 'verticali', della traiettoria del cammino, riferendosi al periodo $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3}{2}\pi\right)$.

(c) - Mostrare che i punti di intersezione nel periodo $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3}{2}\pi\right)$ sono sui piani di simmetria verticale. Per $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ quanti sono i punti di autointersezione su $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3}{2}\pi\right)$?

- Per $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ si disegnino approssimativamente le proiezioni ortogonali delle traiettorie dei cammini γ_n su piano coordinato definito da $z = 0$.

SOLUZIONE ESERCIZIO 17. (a)- Poichè $|\gamma(0)| = 1$ basta mostrare che $|\gamma(t)|^2$ ha derivata nulla. Si ha $\dfrac{d|\gamma(t)|^2}{dt} \ = \ 2\langle \gamma(t)\cdot\gamma'(t)\rangle \ = \ 0$ poichè $\gamma(t) = |\gamma(t)|\ \hat{r}(\gamma(t)) \perp \ \hat{\theta}(\gamma(t)), \ \ \hat{\phi}(\gamma(t))$.

- La velocità del cammino fa un angolo, in senso antiorario, costante $\beta \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, con il parellelo della posizione, orientato da "occidente ad oriente": $\lambda o\xi \acute{o}\varsigma$ obliquo, $\delta\rho\acute{o}\mu o\varsigma$ cammino.

(b) - La posizione $\gamma(t)$ espressa in termine di coordinate sferiche, $(1, \varphi(t), \vartheta(t))$, è quindi:

$\gamma(t) = (\cos\vartheta(t)\cos\varphi(t), \cos\vartheta(t)\sin\varphi(t), \sin\vartheta(t))$, derivando si ha

$$\begin{aligned}
\gamma'(t) \ &= \\
&\varphi'(t)\cos\vartheta(t)\,(-\sin\varphi(t), \cos\varphi(t), 0) \ + \ \vartheta'(t)\,(-\sin\vartheta(t)\cos\varphi(t), -\sin\vartheta(t)\sin\varphi(t), \cos\vartheta(t)) = \\
&= \ \varphi'(t)\cos\vartheta(t)\ \hat{\phi}(\gamma(t)) \ + \ \vartheta'(t)\ \hat{\theta}(\gamma(t))
\end{aligned}$$

usando $\gamma'(t) \ = \ \cos\beta\ \hat{\phi}(\gamma(t)) + \sin\beta\ \hat{\theta}(\gamma(t))$ e le condizioni estreme: $\begin{cases} \varphi'\cos\theta \ = \ \cos\beta \\ \vartheta' \ = \ \sin\beta \\ \varphi(0) = \vartheta(0) = 0 \\ \vartheta(t) \to \pm\frac{\pi}{2}^{\mp}\ , \quad t \to \pm\frac{L}{2} \end{cases}$

pertanto $\vartheta(t) \ = \ t\sin\beta \ > \ 0$, quindi per la condizione limite $L \ = \ \dfrac{\pi}{\sin\beta}$, ed essendo t il parametro di lunghezza d'arco $|\gamma(t)'| = 1$, è la lunghezza cercata.

- Per quanto sopra si ha $\varphi(t) \ = \ \cos\beta \displaystyle\int_0^t \frac{1}{\cos(s\sin\beta)}\,ds \ = \ \cot\beta \int_0^{\vartheta(t)} \frac{1}{\cos\vartheta}\,d\vartheta =$

$= \dfrac{\cot\beta}{2}\log\dfrac{1+\sin\vartheta}{1-\sin\vartheta}$: in coordinate sferiche, si esplicita $\tilde{\gamma}(\vartheta) =: \gamma\left(\dfrac{\vartheta}{\sin\beta}\right)$.

(c) - Usando le coordinate sferiche sul dominio $V(\tilde{\gamma}) = \dfrac{1}{\cos^2\vartheta}\hat{\phi}(\tilde{\gamma})$.

Poichè $\tilde{\gamma}'(\vartheta) = \dfrac{1}{\sin\beta}\gamma'\left(\dfrac{\vartheta}{\sin\beta}\right)$ e $\gamma' \ = \ \cos\beta\ \hat{\phi}(\gamma) + \sin\beta\ \hat{\theta}(\gamma)$, si ha $\langle V(\tilde{\gamma})\cdot\tilde{\gamma}'\rangle = \dfrac{\cot\beta}{(\cos\vartheta)^2}$.

Passando all'integrale

$$\int_{\tilde{\gamma}(0;\frac{\pi}{2})} V = \cot\beta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\vartheta}{(\cos\vartheta)^2} = \cot\beta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\vartheta}{\sin(\vartheta-\frac{\pi}{2})^2} = \cot\beta\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{dz}{(\sin z)^2} = +\infty$$

- Integrando V sui cammini $\kappa_n(t)(\cos nt, \sin nt, g(t)), \ \ldots$ per $t \in [0; 2\pi]$, che hanno velocità $n\left(-\sin nt, \cos nt, \frac{g'(t)}{n}\right)$: $\displaystyle\int_{\kappa_n} V \ = \ \int_0^{2\pi} n\,dt = \ 2\pi \ \cdot n,$

- Quindi intuitivamente la lossodromia fa infiniti giri attorno all'asse verticale, per $t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, partendo da $(1,0,0)$ e tendendo a $(0,0,1)$.

NOTA: *in generale se* $\lambda(t) \ = \ (x,y,z)$, *è un cammino nello spazio cartesiano, che non passi per l'asse verticale, considerando la sua proiezione ortogonale su tale cilindro* $\hat{\lambda} \ = \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, z\right)$ *si ha* $\displaystyle\int_\lambda V \ = \ \int_{\hat{\lambda}} V.$