Analisi Matematica II, Anno Accademico 2017-2018.
Ingegneria Edile e Architettura

Vincenzo M. Tortorelli

FOGLIO DI ESERCIZI n. 3

LIMITI E CONTINUITÀ

NEGLI SPAZI CARTESIANI

Gli esercizi contrassegnati con • sono piú impegnativi.

ESERCIZIO 1 (Es. 1(a), II parte, 3 appello 20/7/15) Si studi l'intersezione dei grafici delle due funzioni

$$u(x,y) = x + y^2, \qquad v(x,y) = 2x^2 + 2y^4,$$

mettendo in risalto: se tale intersezione è limitata in $\mathbf{R}^3$, e se esistono punti nell'intorno dei quali essa non è sostegno di una curva regolare.

ESERCIZIO n. 2 (Es.3 Prima Itinere 26-2-15) Calcolare, nel caso esista : $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^4+y^2}$.

ESERCIZIO n. 3 (Es.4 Prima Itinere 26-2-15) Calcolare, nel caso esista: $\displaystyle\lim_{\substack{x^2+y^2\to+\infty \\ 2x^2\geq y\geq x^2}} xy - x^2 + y^2$.

• ESERCIZIO n. 4 (Es.2 Prova di autovalutazione 15-12-14) Per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ esiste $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|y|^\alpha - x^2}}{x^2+y^2}$. .

• ESERCIZIO n. 5 (Es.4 Prova di autovalutazione 15-12-14) Per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ esiste $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{|x|^\alpha + |y|^{2\alpha}}$.

• ESERCIZIO n. 6 Tra le seguenti implicazioni si provino quelle valide e si trovi un controesempio per ognuna di quelle false:

1. $\exists \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \implies \exists \lim_{x\to x_0} \lim_{y\to y_0} f(x,y).$
2. $\exists \lim_{x\to x_0} \lim_{y\to y_0} f(x,y) = \lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0} f(x,y) \implies \exists \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y).$
3. $\begin{cases} \exists \lim_{x\to x_0} \lim_{y\to y_0} f(x,y) = \lambda_1 \\ \exists \lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0} f(x,y) = \lambda_2 \\ \exists \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lambda_3 \end{cases} \implies \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3.$

ESERCIZIO n. 7 Si studi l'esistenza dei limiti nei domini delle seguenti funzioni, al variare di eventuali parametri, e quando possibile se ne calcoli il valore:

$$\frac{xy}{x^2+y^2};\ \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2};\ x^2\log(x^2+y^2);\ \frac{x\sin y}{y\sin x};\ \frac{x^2y^2}{x^2+y^4};\ \frac{\sin(x|y|)}{x^2+|y|};\ \frac{e^{x^2y}-x\sin(xy)-1}{(x^2+y^2)^2}:\ (x,y)\to(0,0);$$

$$\frac{x+y}{3x+2y};\ \frac{x^3+y^2}{x^2y^2};\ \frac{x^3+y^2}{x^3+y^3};\ \frac{y^2+x+y}{x^2+x+y};\ \bullet\ \frac{x^2y^2}{|x|^\alpha+|y|^\alpha}:\ (x,y)\to(0,0)\ ;$$

$\dfrac{y}{x^2-y}$: $(x,y) \to (0,0)$; $\dfrac{y}{x^2-y}$: $(x,y) \underset{|y|\le|x|}{\to} (0,0)$;

$x-y^2$: $x^2+y^2 \to \infty$; $x-y^2$: $x^2+y^2 \underset{2y^2\le x}{\to} \infty$; $\dfrac{x^2+y}{x^2+y^2+2xy}$: $x^2+y^2 \to \infty$;

$\dfrac{x^2y+x^2z+y^2z}{x^2+y^2+z^2}$; $\dfrac{xy+xz+yz}{x^2+y^2+z^2}$; $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{x^4+y^4+z^4}$; $x^4+y^4-xyz-z^2y$; $x^4+y^4+z^4-xyz$: $x^2+y^2+z^2 \to +\infty$;

$\dfrac{\log xy}{(x-1)^2+(y-1)^2}$: $(x,y) \to (1,1)$; $\bullet \dfrac{x^\alpha y^\beta}{x^2+y^4}$, $\bullet \dfrac{x^\alpha + y^\beta}{x^2+y^4}$: $(x,y) \to (0,0)$, $\alpha,\ \beta > 0$.

ESERCIZIO n. 8 Si studi la continuità delle funzioni: $\bullet f(x,y) = \displaystyle\int_0^y g(t,x)dt, g \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2)$;

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \ne (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}; \qquad f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \ne (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases};$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x^3}e^{-\frac{y^2}{x^4}} & x \ne 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}; \qquad f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^6} & (x,y) \ne (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases};$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy-\sin xy}{x^6+y^6} & (x,y) \ne (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}; \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & (x,y) \ne (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

ESERCIZIO n. 9 Si dica se la seguenti funzioni assumono valore massimo o assumono valore minimo sui domini rispettivamente specificati:

a- $\quad f(x,y) = \displaystyle\int_{\sqrt{\log(1+y^4)}}^{x^2} e^{t^2}dt$, $\quad D = \{|x|, |y| \le 1\}$

b- $\quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+4y^2} + x\ , & xy > 0 \\ xy + x\ , & xy \le 0 \end{cases}$, $D = \{0 \le y \le 1,\ y^2 - 1 \le x \le 1\}$.

$\bullet$ c- $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$, $\ D = \{(z+1)^2 - y^2 - (x+3)^2 = 0,\ z^2+y^2-(x+1)^2 = 0\}$

$\bullet$ ESERCIZIO n. 10 Si consideri la funzione $F(x,y) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{y^2} \frac{\sin \frac{t}{x^2}}{1+t^2}\,dt & x \ne 0 \\ & (x,y) \in \mathbf{R}^2. \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

- Si mostri che F è continua per $x \ne 0$.
- Integrando per parti si mostri che F è continua anche per $x = 0$.

ESERCIZIO n. 11 Si considerino l'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 :\ x^2 - y^2 - (x-y)^2 = 1\}$ e la funzione $f(x,y) = (x-3y)^2$.

- Si provi che $\displaystyle\lim_{\substack{x^2+y^2\to+\infty \\ (x,y)\in E}} f(x,y) = +\infty$.
- Si mostri che f assume valore minimo su E e si calcoli tale valore.