

Analisi Matematica II, Anno Accademico 2017-2018.

Ingegneria Edile e Architettura

Vincenzo M. Tortorelli

FOGLIO DI ESERCIZI n. 4

SPAZI METRICI, NORMATI E PRODOTTI SCALARI

Gli esercizi contrassegnati con • sono piú impegnativi.

ESERCIZIO n. 1 Si trovi la minima distanza del punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ dai punti del grafico (t, t^2) , $t \in \mathbf{R}$ rispettivamente rispetto: alla norma euclidea (cfr. es. 21, foglio n. 1), alla norma ℓ^1 , alla norma ℓ^∞ .

• ESERCIZIO n. 2 Trovare la distanza di $(0, \dots, 0) \in \mathbf{R}^d$ dall'insieme definito da $|x_1| + \dots + |x_d| = 1$, $x \in \mathbf{R}^d$.

ESERCIZIO n. 3 La funzione $\frac{1}{(t^{\frac{1}{3}} + t^{\frac{3}{2}})|t - 1|^{\frac{2}{3}}}$ ha norma $L^2(0; +\infty)$ finita?

ESERCIZIO n. 4 Trovare una funzione assolutamente integrabile in $(0; +\infty)$ ma con norma $L^2(0; +\infty)$ infinita [usare funzioni costanti a tratti].

• ESERCIZIO n. 5 Trovare una funzione $y = f(x)$ con norma $L^2(0; +\infty)$ finita, e con infiniti asintoti verticali $x = t_n$, $n \in \mathbf{N}$, e $t_n \rightarrow +\infty$ per $n \rightarrow +\infty$ [La si cerchi non negativa e continua negli intervalli $(t_n; t_{n+1})$].

ESERCIZIO n. 6 Trovare le distanze indotte dal prodotto scalare di $L^2(-\pi; \pi)$ tra la funzione $f(t) = t$ e, rispettivamente, le funzioni $\varphi_n(t) = \cos nt$, $\psi_n(t) = \sin nt$.

ESERCIZIO n. 7 a) Trovare la minima distanza rispetto alla norma uniforme su $[-\pi; \pi]$ della funzione $f(t) = \sin t$ dall'insieme funzioni costanti.

b) Trovare la minima distanza della funzione $f(t) = t^2$ dall'insieme delle funzioni costanti, rispetto sia alla distanza $L^1(-\pi; \pi)$, che a quella uniforme su $[-\pi; \pi]$.

ESERCIZIO n.8 Trovare la minima distanza $L^2(-\pi; \pi)$ della funzione $f(t) = t^2$ dalle funzioni $g(t) = at + b$, al variare di a , b in \mathbf{R} .

• ESERCIZIO n. 9 [L^2 con densità] a) Sia f una funzione assolutamente integrabile in senso improprio su $(0; 1)$. Si mostri che $\mathcal{B}(\varphi, \psi) = \int_0^1 \varphi(t)\psi(t)f(t)dt$ è ben definito ed è un prodotto scalare degenere sullo spazio vettoriale delle funzioni $C([0; 1])$.

b) Si mostri con un esempio che può esser degenere.

c) Si trovi una condizione sufficiente sulla densità f per cui sia non degenere.

ESERCIZIO n.10 Si mostri che il rapporto tra la norma $f \mapsto \max_{[a;b]} |f|$ e $f \mapsto \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}$ non può essere limitato al variare di f .

ESERCIZIO n. 11 Siano $d : X \times X \rightarrow \mathbf{R}^+$, $\rho : X \times X \rightarrow R^+$, $\delta : Y \times Y \rightarrow \mathbf{R}^+$, distanze sull'insieme X e sull'insieme Y . Si discuta quale delle seguenti funzioni è ancora una distanza.

$$d_1(a, b) = \frac{d(a, b)}{1+d(a, b)} ; \quad \bullet \quad d_2(a, b) = \arctan(d(a, b)) \text{ [cfr. es.3, foglio n.1]} ;$$

$$d_3(a, b) = \min\{d(a, b), 1\} ;$$

$$d_4((a, \alpha), (b, \beta)) = \max\{d(a, b); \delta(\alpha, \beta)\} ; \quad d_5((a, \alpha), (b, \beta)) = (d(a, b)^2 + \delta(\alpha, \beta)^2)^{\frac{1}{2}} ;$$

$$\bullet d_6(a, b) = \Psi(d(a, b)), \Psi \text{ concava, non negativa, nulla in } 0 ; \quad d_7(a, b) = \chi_{]0;+\infty[}(d(a, b)).$$

(Con χ_A si indica la funzione che vale 1 su A e 0 sul complementare di A .)

ESERCIZIO n.12 Siano V e W due spazi normati con norme $|\cdot|_V$ e $|\cdot|_W$. Data una funzione lineare $L : V \rightarrow W$ si definisce: $\|L\| =_{def} \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{|Lv|_W}{|v|_V}$.

a- Si Provi che se V e W hanno dimensione finita allora $\|L\|$ è sempre finito.

b- Si provino comunque le seguenti eguaglianze

$$\|L\| = \sup_{|v|_V=1} |Lv|_W = \sup_{0 < |v|_V \leq 1} \frac{|Lv|_W}{|v|_V} = \sup_{0 < |v|_V \leq 1} |Lv|_W.$$

c- Quindi si provi che le funzioni lineari L da V in W per cui $\|L\|$ è finita formano uno spazio vettoriale, e che $\|\cdot\|$ è una norma su tale spazio.

ESERCIZIO n.13 Si calcolino le norme, definite nel precedente esercizio, delle seguenti funzioni lineari:

$$L(x, y) = ax + by ; \quad L(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ; \quad x \in \mathbf{R}^n \mapsto Ax \in \mathbf{R}^n, \quad {}^tAA = I ;$$

$$L(f) = \int_0^1 f(y)dy \in \mathbf{R} = W, \quad f \in C([0; 1]) = V, \quad |f|_C = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)| ;$$

$$L(f) = \int_0^x f(y)dy \in C([0; 1]) = W, \quad f \in C([0; 1]) = V = W, \quad |f|_C = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|.$$

ESERCIZIO n.14 a- Se A è una matrice $n \times n$ si provi, con la notazione dei precedenti esercizi, che $\|A\|^2 = \|{}^tAA\|$. Si mostri che non sempre $\|A\|^2 = \|A^2\|$.

b-Se si identifica una matrice $n \times n$ con un vettore di \mathbf{R}^{n^2} sussiste qualche diseuguaglianza tra $\|A\|$ l'usuale norma euclidea $|A|_{n^2}$, indipendentemente da A ?
