

Analisi Matematica II, Anno Accademico 2017-2018.

Ingegneria Edile e Architettura

Vincenzo M. Tortorelli

FOGLIO DI ESERCIZI n. 5

DIFFERENZIALE, PIANI TANGENTI E NORMALI, REGOLA DELLA CATENA

Gli esercizi contrassegnati con • sono piú impegnativi.

ESERCIZIO n.1 a- Calcolare le derivate prime delle seguenti funzioni nei punti $(2, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 2, 3)$ rispetto ad ognuna delle variabili:

$$e^{x^4 y^2 z} - xz \sin(xy) - 1; \quad \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}; \quad \frac{\sin(xyz)}{x^2+y^2+z^2}; \quad (x^2 + z^2) \log(x^2 + y^2); \quad \frac{x \sin zy}{200+zy \sin x}; \quad \frac{x^2 y^2}{x^2+y^4+1}.$$

b- Calcolare quindi le funzioni derivate rispetto alla prima variabile delle stesse funzioni.

ESERCIZIO n. 2 Si scriva la matrice Jacobiana delle seguenti funzioni: $x + 2y + 3z$;
 $(x + 2y + 3z, -x)$; $(x + 2y + 3z, x^2 - y^3 + z^4)$; $(e^{x+y+z+w}, \sin(x + \log(1 + y^2 + w^6)) - z, xyzw)$.

ESERCIZIO n. 3 Si studino la continuità, la derivabilità nelle diverse direzioni, e la differenziabilità delle seguenti funzioni:

$$\sqrt{|xy|}; \quad \sqrt{|x|} \cos y; \quad f_{(x,y)} = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}; \quad f_{(x,y)} = \begin{cases} xy \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases};$$

$$\int_0^y f(t, x) dt, \quad f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2);$$

ESERCIZIO n. 4 • a- (Prova di autovalutazione 15 Dicembre 2014)

Si determini il piano normale in $(1, 1, 2)$ all'insieme definito da $xyz = 2$, $xy + xz + yz = 5$.

b- (I Prova in itinere 26 Febbraio 2015 prima parte Esercizio 5)

Si calcoli il piano tangente al grafico della funzione $\arctan(x + 2y)$ nel punto $(1, 0, \frac{\pi}{4})$.

c- (I Appello 11 Giugno 2015 prima parte Esercizio 3)

Si dica se la funzione $f(x, y) = (x^2)^{y^2+1}$ è differenziabile in $(0, 0)$ e nel caso se ne calcoli il differenziale.

d- (II Appello 2 Luglio 2015 Gruppo A prima parte Esercizio 4)

Si calcoli il piano tangente all'immagine della funzione $F(u, v) = (u - v, uv, u + v)$ nel suo punto $F(1, 1) = (0, 1, 2)$.

e- (II Appello 2 Luglio 2015 Gruppo B prima parte Esercizio 2)

Se la funzione $e^{x+y} + \sqrt{1 - \cos xy}$ è differenziabile in $(0, 0)$ si calcoli $\nabla f(0, 0)$.

f- (II Appello 2 Luglio 2015 Gruppo B prima parte Esercizio 3) Si calcoli un versore normale al grafico di $\cos(x + y) - \tan(x + y) \sin xy$ nel punto $(\sqrt{\pi}, -\sqrt{\pi}, 1)$

ESERCIZIO n. 5 - Si trovi l'angolo di incidenza in $(1, 1)$ tra le due curve $y = x$, $y = x^2$.

- Si trovi la tangente nel punto $(1, 1)$ dell'insieme di punti del piano definito da $x^7 + y^7 - 2 = 0$

- Si calcolino seno e coseno dell'angolo di incidenza in $(1, 1)$ tra le due curve (x^3, x^7) , (x^5, x^9) .

- Trovare una normale in $(1, 1, 2)$ al sostegno di $(u, v) \mapsto (v \cos u, v \sin u, v^2)$, $v > 0$.

• - Si trovino le tangenti nel punto $(0, 0)$ dell'insieme del piano definito da $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$.

- Si trovi il piano tangente alla sfera di centro $(1, 1, 1)$ e raggio 1 in $(1, \frac{1}{2}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2})$.
- Si trovi la retta ortogonale alla regione $\{(x, y, z) : \log(x^2 + y^2 + e) = e^z\}$ in $(0, 0, 1)$.
- Si trovi il tangente nel punto $(1, 1, -1)$ dell'insieme di punti definito da $x^7 + 2y^7 + z^7 - 2 = 0$ e $x^5 + 2y^5 + z^3 - 2 = 0$

• - Si trovino le tangenti nel punto $(0, 0, 0)$ dell'insieme definito da $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2(x^2 - y^2 - z^2)$ e $x - y^2 - z^2 = 0$.

- Si calcoli l'angolo di incidenza che formano le seguenti coppie di regioni dello spazio incontrandosi nei punti rispettivamente indicati:

- $\{(x, y, z) : 2x^4 + 3y^3 - 4z^2 = -4\}, \{(x, y, z) : 1 + x^2 + y^2 = z^2\}, (0, 0, 1);$
- $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = e^z\}, \{(x, y, z) : x^2 + z^2 = e^y\}, (1, 0, 0);$
- $\{(x, y, z) : xy = z\}, \{(x, y, z) : \cos(2\pi xy) = z\}, (1, 1, 1).$

ESERCIZIO n. 6 Si disegnino le curve $2y^2 - x(x - 1)^2 = 0$ e • $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$,
 • $x^3 + y^3 - 3axy, a > 0$.

ESERCIZIO n. 7 Sia $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \quad x \neq 0 \quad 0 \quad x = 0$. $a -$ *Siprovich* è continua su \mathbf{R} .

b - Si provi che le derivate di f in $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ sono del tipo funzione razionale moltiplicato f .

• c - Si provi che f è derivabile infinite volte in $x = 0$.

d- Si studi se le funzioni $f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x} e^{-\frac{y^2}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}; \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x^3} e^{-\frac{y^2}{x^4}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$.

hanno derivate parziali in ogni punto e si studi la differenziabilità in $(0, 0)$.

ESERCIZIO n. 8 Sia $f : \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}$ differenziabile ovunque e sia x_0 tale che $\nabla f(x_0) \neq 0$. Dimostrare che la direzione u rispetto a cui:

$$\frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{x_0} = \max \left\{ \frac{\partial f}{\partial v} \Big|_{x_0} : v \in \mathbf{R}^n, \|v\| = 1 \right\} \text{ è data da } u = \frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}.$$

ESERCIZIO n. 9 - Per la curva in $\mathbf{R}^3 \quad t \mapsto (\cos t, \sin t, t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$ la tangente non è mai parallela al segmento tra i due estremi

• - Si mostri che in una curva piana differenziabile ogni corda ha una direzione tangente parallela (si usi opportunamente il determinante e il teorema di Rolle).

• ESERCIZIO n. 10 Sia $f \in C^1(A)$, con A aperto. Dimostrare che f è positivamente omogenea di grado α (i.e. $f(tx) = t^\alpha f(x)$ per ogni $x \in A$) se e solo se $\alpha f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f_{x_i}(x)$.

ESERCIZIO n. 11 Dato $C \subseteq \mathbf{R}^2$ si definisce la funzione distanza da C come segue:

$$d_C(x, y) = \inf_{(a, b) \in C} \sqrt{|x - a|^2 + |y - b|^2}$$

Si descrivano, nei seguenti casi, le regioni del piano ove d_C è differenziabile:

- (a) $C = \{(0, 0)\};$ (b) $C = \{(-1, 0), (0, 1)\};$ • (c) $C = \{(-1, 0)\} \cup \{(1, b) : b \in \mathbf{R}\};$ • (d) $C = \{(-1, 0)\} \cup \{(a, b) : (a + 1)^2 + b^2 = 1\}.$

ESERCIZIO n. 12 Si consideri la funzione $f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ ($(x, y) \neq (0, 0)$) 0 ($(x, y) = (0, 0)$).
Si provi che non è due volte differenziabile in $(0, 0)$.

ESERCIZIO n. 13 Sia $f : \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}$ differenziabile ovunque e sia $F : \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ definita da: $F(\rho, \varphi) = f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$. Verificare che: $(F_\rho(\rho, \varphi))^2 + \frac{1}{\rho^2}(F_\varphi(\rho, \varphi))^2 = (f_x(x, y))^2 + (f_y(x, y))^2$ dove $x = \rho \cos \varphi$ e $y = \rho \sin \varphi$.

- Sia $f : \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}$ differenziabile ovunque e sia $F : \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ definita da: $F(R, \varphi, \theta) = f(R \cos \theta \cos \varphi, R \cos \theta \sin \varphi, R \sin \theta)$. Si calcolino le derivate di F in funzione di quelle di f .

- Sia $g : [0; +\infty[\mapsto \mathbf{R}$ derivabile e sia $f(x, y, z) = g(x^2 + y^2 + z^2)$. Si provi che $f : \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}$ è differenziabile e si calcoli il gradiente di f esprimendolo in coordinate cartesiane e in coordinate sferiche.

ESERCIZIO n. 14 Data una funzione differenziabile due volte $f(x, y)$ sia $g = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$. Considerando il cambio di coordinate $(u, v) = (x, \frac{x}{\sqrt{y}})$, si esprima $g(x, y)$ in funzione di u e v e delle derivate rispetto alle variabili (u, v) .

ESERCIZIO n. 15 Sia $T : \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}^2$ una rotazione, cioè una applicazione lineare del tipo $x \mapsto Rx$, con $R = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$.

Detto $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, dimostrare che: $\Delta(u \circ R) = (\Delta u) \circ R$ per ogni $u \in C^2$.

ESERCIZIO n.16 Si esprima $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ rispetto alle coordinate polari.

ESERCIZIO n. 17 Si identifichi lo spazio M delle matrici $n \times n$ con \mathbf{R}^{n^2} , ordinando in modo lessicografico gli elementi delle matrici.

a) Si verifichi che con questa identificazione il prodotto scalare tra due matrici A e B come elementi di \mathbf{R}^{n^2} è dato da $tr A \cdot {}^t B$ (ove \cdot indica il prodotto righe per colonne, ${}^t B$ la matrice trasposta di B , e $tr C$ la traccia di una matrice quadrata C).

b) Sia $t \mapsto A(t)$ una funzione regolare da $] - 1; 1[$ in M tale che $A(0) = A$ e $A'(0) = I$, ove I è la matrice dell'identità. Si trovi lo sviluppo di Taylor del primo ordine di $A(t)$ in $t = 0$.

• c) Se $\Sigma = \{det A = 1\}$, i vettori $X \in M$ tangenti ad $A \in \Sigma$ sono quelli per cui $tr A^{-1} \cdot {}^t X = 0$.

• d) Sia $f : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(A) = det A$. Si dimostri se $f(A) \neq 0$: $\nabla f(A) = (det A) {}^t A^{-1}$

e) Si consideri la funzione $f : \mathbf{M} \mapsto \mathbf{R}$ definita da $f(A) = det A$. Si dimostri che :

$$d_A f[H] = tr({}^t cof A \cdot H)$$

ove $(-1)^{i+j}(cof A)_{i,j} =$ determinante del minore di A ottenuto cancellando la i -esima riga e la j -esima colonna.

ESERCIZIO n. 18 Si provi che $(\varphi, z) \mapsto (R \cos \frac{\varphi}{R}, R \sin \frac{\varphi}{R}, z)$ conserva i prodotti scalari tra le velocità di cammini (e quindi l'angolo e il modulo).

• ESERCIZIO n. 19 a- Si provi che una trasformazione lineare da \mathbf{R}^2 a valori in \mathbf{R}^2 o in \mathbf{R}^3 conserva gli angoli tra vettori se e solo se i trasformati della base canonica sono ortogonali e di egual lunghezza.

b- Si deduca che una trasformazione differenziabile f tra due aperti del piano conserva gli angoli tra i vettori tangenti di curve incidenti in un punto P se e solo se $D_p f$ conserva gli angoli tra vettori.

NOTA: Ad una funzione $F : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ del tipo $F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ si associa la funzione \tilde{F} da \mathbf{C} in se: $z = x + iy$, $\tilde{F}(z) = f(x, y) + ig(x, y)$.

Tra le funzioni con derivate parziali vi sono quelle che ammettono derivata in senso complesso $\lim_{h \rightarrow 0, h \in \mathbf{C}} \frac{F(z+h) - F(z)}{h}$.

ESERCIZIO n. 20 a- Si provi che le funzioni F differenziabili per cui \tilde{F} ha derivata in senso complesso sono tutte e sole quelle per cui $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x}$.

• b- Tra le funzioni da \mathbf{R}^2 in se che ammettono derivate parziali continue le uniche che conservano gli angoli tra due curve sono quelle derivabili in senso complesso.

• ESERCIZIO n. 21.1 Si mostri che se $t \mapsto s(t) \in]-1, 1[$ è una funzione derivabile strettamente crescente, $(\varphi, t) \mapsto (\sqrt{1 - s^2(t)} \cos \varphi, \sqrt{1 - s^2(t)} \sin \varphi, s(t))$ è una parametrizzazione della sfera che conserva gli angoli tra curve se e solo se $s'(t) = 1 - s^2(t)$

- Imponendo che $s(0) = 0$ si provi che $s(t) = \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1}$.

- Esprimere la coordinata t così determinata (di Mercatore) con la “latitudine” θ .

• ESERCIZIO n. 21.2 - Si provi che $(x, y, z) \mapsto \left(\frac{2rx}{r-z}, \frac{2ry}{r-z}\right)$ ristretta alla sfera di centro l'origine e raggio r è la proiezione stereografica dal “polo nord” sul tangente per il “polo sud”.

- Se ne scriva l'inversa $(u, v) \mapsto (a(u, v), b(u, v), c(u, v))$

• - Si provi in modo sintetico che conserva gli angoli.

• ESERCIZIO n. 21.3 Si esprimano le coordinate della proiezione stereografica (u, v) in funzione di quelle di Mercatore. Si deduca quindi che la proiezione stereografica mantiene gli angoli tra curve e viceversa.

- Utilizzando longitudine e latitudine si provi che la proiezione stereografica conserva gli angoli.
