

Analisi Matematica II, Anno Accademico 2017-2018.

Ingegneria Edile e Architettura

Vincenzo M. Tortorelli

FOGLIO DI ESERCIZI n. 6

PRESENTAZIONE DI VARIETÀ: TEOREMI DEL DINI E DEL RANGO

Gli esercizi contrassegnati con • sono più impegnativi.

I riferimenti a prove in itinere e prove di esame si riferiscono all'insegnamento di Analisi Matematica 2 per il corso di laurea in Ingegneria Civile Ambientale, Edile, per gli anni accademici citati.

ESERCIZIO n. 1 a-(Test di ingresso, seconda parte Settembre-Ottobre 2014, Esercizio 12)

Si calcoli la dimensione del nucleo dell'applicazione lineare che, relativamente alle basi canoniche di \mathbf{R}^5 ed \mathbf{R}^3 , è associata alla matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & -3 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b-(Test di ingresso, seconda parte Settembre-Ottobre 2014, Esercizio 14)

a) Disegnare nel piano cartesiano il sottoinsieme di \mathbf{R}^2 dato da

$$(1 + s + t, 1 + s), \quad (s, t) \in [0; 1] \times [0; 1] .$$

b) Che tipo di figura geometrica rappresenta il sottoinsieme di \mathbf{R}^4 dato da

$$(1 + r + s + t, 1 + r, 1 + s, 1 + t), \quad (r, s, t) \in [0; 1] \times [0; 1] \times [0; 1] ?$$

ESERCIZIO n.2 (Test di ingresso, seconda parte Settembre-Ottobre 2014, Esercizio 19)

Grazie al teorema del Dini, per (x, y) "vicino" a $(1, 2)$, il luogo di zeri

$$f(x, y) =: y \cdot 2^x + \sin\left(\pi \frac{x}{y}\right) - 5 = 0$$

definisce implicitamente x in funzione di y , $x = x(y)$, in modo che $f(x(y), y) = 0$. Calcolare $\frac{dx}{dy}(2)$.

ESERCIZIO n.3 (Prova in itinere di Autovalutazione, 15 Dicembre 2014, prima parte Esercizio 5) Si scriva l'equazione del piano normale in $(1, 1, 2)$ al luogo di zeri definito dalle equazioni $xyz = 2$, $xy + yz + xz = 5$.

ESERCIZIO n. 4 a- Si calcoli la derivata $\frac{dy}{dx}$ nei seguenti casi:

$$x^3y - y^3x = a^2, \quad \sin xy - e^{xy} - x^2y = 0, \quad x^y = y^x .$$

b- Si calcolino le derivate specificate per le seguenti relazioni:

$$\frac{x^2}{a^2} + y^2b^2 + z^2c^2 = 1 : \frac{\partial z}{\partial x}; \quad z^3 + 3xyz = a^3 : \frac{\partial z}{\partial x}; \quad e^z - xy^2z = 0 : \frac{\partial z}{\partial y}.$$

ESERCIZIO n.5 a-(Primo Appello 11 giugno 2015, prima parte Esercizio 4b)

Sia $f(x, y, z) = e^{xyz} - z \log(1 + x^2 y^2)$.

(a) [omissis] ; (b) Detta $z = z(x, y)$ la funzione definita dall'equazione $f(x, y, z) = 1$ intorno al punto $(1, 1, 0)$, calcolare $\frac{\partial z}{\partial x}(1, 1)$.

b-(Secondo Appello 2 Luglio 2015, prima parte gruppo A Esercizio 4)

Sia $F(u, v) = (u - v, uv, u + v)$. Si determini l'equazione del piano tangente all'immagine di F nel punto $F(1, 1) = (0, 1, 2)$.

c-(Secondo Appello 2 Luglio 2015, prima parte gruppo A Esercizio 5)

Sia $\Phi(x, y) = \begin{pmatrix} e^x + y \\ xy \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$. Detta $\Psi(u, v) := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ l'inversa locale della restrizione di Φ ad un intorno del punto $(1, 1)$, si calcoli $\frac{\partial y}{\partial u}(e + 1, 1)$.

d-(Terzo Appello 2 Luglio 2015, prima parte, primo gruppo, Esercizio 3)

Si consideri la funzione $z = z(x, y)$ definita implicitamente, in un intorno di $(\sqrt{\pi}, -\sqrt{\pi}, 0)$, da $2y + x + \cos(x + y + z) - \sin(zxy) = 1 - \sqrt{\pi}$. Se ne calcoli la derivata $\frac{\partial z}{\partial y}(\sqrt{\pi}, -\sqrt{\pi})$.

e-(Quarto Appello 11 Settembre 2015, prima parte, primo gruppo, Esercizio 4)

In quali punti l'insieme delle soluzioni di $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + z^2 = 1 \end{cases}$ non è localmente un grafico?

ESERCIZIO n.6 (Secondo Appello 2 Luglio 2015, seconda parte gruppo A Esercizio 2(a))

Sia $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^3 e^{-xy} = 8, z \geq 0\}$.

Si mostri che S è una 2-varietà con bordo e se ne determini il bordo bS .

ESERCIZIO n.7 (Terzo Appello 20 Luglio 2015, seconda parte Esercizio 1)

(a) Si studi l'intersezione dei grafici delle due funzioni $u(x, y) = x + y^2$, $v(x, y) = 2x^2 + 2y^4$, mettendo in risalto: se tale intersezione è limitata in \mathbf{R}^3 , e se esistono punti nell'intorno dei quali essa non è sostegno di una curva regolare.

(b) Si disegnano in modo approssimativo ma esauriente gli insiemi di livello delle funzioni u e v sopra definite.

(c) Si individui sotto forma di luogo di zeri l'insieme dei punti del piano ove gli uni sono tangenti agli altri.

ESERCIZIO n. 8 (Quarto Appello 11 Settembre 2015, seconda parte Esercizio 1. Nota del 9 Novembre 2016: il testo e la soluzione in rete non sono corretti)

(a) Si mostri che la funzione $f(x, y, z, w) = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$ sull'insieme definito da $g(x, y, z, w) = xyzw = 1$ assume come valore minimo 4, e se ne trovino i punti di minimo. [Si osservi che $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \geq 2\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{z^2 + w^2} \geq 4\sqrt{xyzw}$. E le eguaglianze?]

Si consideri $Z \subseteq \mathbf{R}^4$ definito da $Z = \{(x, y, z, w) : f(x, y, z, w) = 10, xyzw = 1\}$.

(b) Mostrare che Z , in un intorno di $\left(\frac{5 - \sqrt{21}}{2}, \frac{5 + \sqrt{21}}{2}, \frac{5 - \sqrt{21}}{2}, \frac{5 + \sqrt{21}}{2}\right)$, è grafico delle

(z, w) in funzione delle (x, y) .

(c) Si determini il piano (bidimensionale) tangente a Z nel punto dato, e si calcoli $\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=\frac{5-\sqrt{21}}{2}, y=\frac{5+\sqrt{21}}{2}}$.

(d) Si dica se nel diedro $x > 0, y > 0, z > 0, w > 0$, l'insieme Z è globalmente il grafico di una funzione vettoriale di due variabili.

• ESERCIZIO n. 9 (Quinto Appello 14 Gennaio 2016, Esercizio 1 primi due punti) Si consideri la funzione $f(x, y, z) = y + z \ln(1 + y) - x^2$, $(x, y, z) \in \mathbf{R} \times]-1, +\infty[\times \mathbf{R}$.

(i) Si mostri che per ogni $(x, z) \in \mathbf{R}^2$ esiste almeno un $y \geq 0$ tale che $f(x, y, z) = 0$, e che tale y è unico allorché $z \geq 0$; in quest'ultimo caso si scriva $y = g(x, z)$, cosicché $f(x, g(x, z), z) = 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$ e $z \geq 0$.

(ii) Si provi che per $x \in \mathbf{R}$ e $z \geq 0$ la funzione g è non negativa, è decrescente e convessa rispetto a z , ed è tale che $x = 0$ se e solo se $g(x, z) = 0$.

ESERCIZIO n.10 (Prima prova in itinere sperimentale 26 Febbraio 2016. Soluzioni qui allegate.)

Siano: $V \subset \mathbf{R}^4$ definito da $\begin{cases} \phi(x, y, z, w) =: xy = 0 \\ \psi(x, y, z, w) =: wz = 1 \end{cases}$,

$S \subset V$ definito da $\text{rango}(\nabla\phi(x, y, z, w) | \nabla\psi(x, y, z, w)) \leq 1$ e $(x, y, z, w) \in V$,
 $f(x, y, z, w) = (x + z)^2 + (y - w)^2$.

(a) - si provi che $\text{rango}(\nabla\phi(x, y, z, w) | \nabla\psi(x, y, z, w)) = 1$ per $(x, y, z, w) \in S$;

- si mostri che S è una 1-varietà regolare, e se ne trovi una parametrizzazione.

- Calcolare le equazioni del 2-piano tangente a V in $(1, 0, 1, 1)$.

- Per $\mathbf{p} \in S$ si trovino tre curve per \mathbf{p} con sostegno in V e velocità (in \mathbf{p}) linearmente indipendenti: si deduca che V non è una varietà regolare.

(b) - Si studi la limitatezza di V e di S . - Si trovino i valori estremali di f su V .

(c) - Si consideri $W = V \cap \{(x, y, z, w) : x = 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.

Si mostri che:

- non è una 2-varietà; - è una 2-varietà con bordo. Lo si determini.

ESERCIZIO n. 11 - Sia $f(x, y) = \left(\frac{x^2 - y^2}{2xy}\right) = (u, v)$: si studi al variare di (u, v) come sono fatte le fibre $f^{-1}\{(u, v)\}$, si studi l'immagine di f .

- Si determinino le regioni ove il differenziale è invertibile.

• - Si determinino quindi le regioni ove la funzione è invertibile.

ESERCIZIO n. 12 a- Sia $f(x, y) = \left(\frac{x^2 - y^2}{xy}\right) = (u, v)$: si trovi un intorno di $P_0 = (1, 1)$ in cui f è iniettiva.

• b- Si calcolino le derivate parziali seconde in $U_0 = (0, 1) = f(1, 1)$ dell'inversa della funzione f ristretta a tale intorno.

ESERCIZIO n.13 a- Siano $f(x, y) = \left(\frac{x^2}{y}\right)$, $g(x, y) = \left(\frac{x^3 + xy}{y}\right)$: se ne studino le immagini.

• b-Si studino le immagini delle regioni ove i differenziali non sono invertibili e come sono fatte le fibre $f^{-1}\{(u, v)\}$, $g^{-1}\{(u, v)\}$.

ESERCIZIO n. 14 a- Sia $f(x, y) = \left(\frac{e^{x+y} - e^{x-y} - k^2 x}{x+y}\right) = (u, v)$, $k \in \mathbf{R}$: si studi l'immagine di f e al variare di (u, v) come sono fatte le fibre $f^{-1}\{(u, v)\}$.

b- Si determini un intorno di $(x, y) = (0, 0)$ in cui f è iniettiva, ed quindi si calcolino (relativamente a tale intorno) $\frac{\partial x}{\partial u}(0, 0)$ e $\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}(0, 0)$.

ESERCIZIO n. 15 a- Sia $f : \mathbf{R}^5 \rightarrow \mathbf{R}^2$ $f(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = \begin{pmatrix} 2e^{x_1+x_2y_1-4y_2+3} \\ x_2 \cos x_1 - 6x_1 + 2y_1 - y_3 \end{pmatrix}$: si verifichi che in un intorno di $(0, 1, 3, 2, 7)$ la regione determinata dalle equazioni $f(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = (0, 0)$ è un grafico rispetto alle variabili (y_1, y_2, y_3) .

b- Si calcoli $\left(\frac{\partial x_1}{\partial y_2}\right)_{y_1, y_3}(3, 2, 7)$.

• c- È possibile esplicitare (x_1, x_2) in funzione di (y_1, y_2, y_3) in ogni punto dell'insieme $\{(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) : f(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = (0, 0)\}$?

SOLUZIONE ESERCIZIO n. 10: (a) - Se $(x, y, z, w) \in S$ il gradiente

$$(\nabla\phi(x, y, z, w) | \nabla\psi(x, y, z, w)) = \begin{pmatrix} y & 0 \\ x & 0 \\ 0 & w \\ 0 & z \end{pmatrix}, \text{ ha rango al più 1: si devono annullare i}$$

minori di ordine 2. Con le condizioni per V :

$$\begin{cases} yw = 0 \\ yz = 0 \\ xw = 0 \\ xz = 0 \\ xy = 0 \\ zw = 1 \end{cases} \iff \text{moltiplicando le prime due}$$

righe rispettivamente per z e $w \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \\ zw = 1 \end{cases}$.

Per $(x, y, z, w) \in S$: $\text{rango}(\nabla\phi(x, y, z, w) | \nabla\psi(x, y, z, w)) = \text{rango} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{z} \\ 0 & z \end{pmatrix} = 1$.

- Quindi S è l'unione di due grafici disgiunti $\gamma^+(z) = \left(0, 0, z, \frac{1}{z}\right)$, $z > 0$ e $\gamma^-(z) = \left(0, 0, z, \frac{1}{z}\right)$, $z < 0$. Per definizione S è una 1-varietà regolare (con due componenti connesse per archi), e una parametrizzazione a due carte.

- Per prima cosa si osserva che la domanda ha senso poichè $\mathbf{q} =: (1, 0, 1, 1) \in V \setminus S$, e su $V \setminus S$ il rango di $(\nabla\phi | \nabla\psi)$ è massimo: 2. *Esplicitamente* $V \setminus S$ intersecato l'intorno di $(1, 0, 1, 1)$, definito da $x > 0$, $z > 0$, corrisponde (permutando le variabili) al grafico di $F(x, z) = \left(0, \frac{1}{z}\right)$.

Per l'ortogonalità del gradiente ai livelli il piano tangente a V in $(1, 0, 1, 1)$ sarà ortogonale ai

due gradienti (linearmente indipendenti!) $\nabla\phi(1, 0, 1, 1)$, $\nabla\psi(1, 0, 1, 1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

e imponendo le condizioni di passaggio per il punto $(1, 0, 1, 1)$ si ha $\begin{cases} y = 0 \\ z + w - 2 = 0 \end{cases}$

NOTA: Considerando il corrispondente al grafico di F $G(x, z) =: \left(x, 0, z, \frac{1}{z}\right)$, $x, z > 0$, come superficie parametrica, il piano tangente ha equazioni parametriche per $(s, t) \in \mathbf{R}^2$:

$$(1, 0, 1, 1) + s \frac{\partial G(\mathbf{q})}{\partial x} + t \frac{\partial G(\mathbf{q})}{\partial z} = (1, 0, 1, 1) + s(1, 0, 0, 0) + t(0, 0, 1, -1) = (1+s, 0, 1+t, 1-t) \text{ che ha, appunto, equazioni } y=0, z+w=2.$$

- Se $\mathbf{p} \in S$ allora per qualche $z \neq 0$ deve essere $\mathbf{p} = \left(0, 0, z, \frac{1}{z}\right)$. I cammini

$$\alpha(t) = \left(t, 0, z, \frac{1}{z}\right), \beta(t) = \left(0, t, z, \frac{1}{z}\right), \gamma(t) = \left(0, 0, (1+t)z, \frac{1}{(1+t)z}\right),$$

hanno sostegno in V , “passano” per $t=0$ per \mathbf{p} , e $\alpha'(0) = (1, 0, 0, 0)$, $\beta'(0) = (0, 1, 0, 0)$, $\gamma'(0) = \left(0, 0, z, -\frac{1}{z}\right)$.

Se V fosse una 2-varietà, le tre velocità dovrebbero appartenere al tangente *bidimensionale*: ma sono *tre* linearmente indipendenti.

(b) - Si ha $V \supset S \supset \left\{ \left(0, 0, z, \frac{1}{z}\right) : z > 0 \right\}$ che è illimitato.

- I valori estremali, eventualmente infiniti, di f su V saranno: $\sup_V f = \max \left\{ \sup_{V \setminus S} f, \sup_S f \right\}$,

$$\inf_V f = \min \left\{ \inf_{V \setminus S} f, \inf_S f \right\}.$$

— Per $(x, y, z, w) \in S$ ($z \neq 0$) si ha $f(x, y, z, w) = f\left(0, 0, z, \frac{1}{z}\right) = z^2 + \frac{1}{z^2}$. Quindi $\sup_V f = \sup_S f = +\infty$, $\inf_S f = \min_S f = 2$.

— Quindi interessa valutare solo $\inf_{V \setminus S} f$ e confrontarlo con $\min_S f = 2$. Conviene spezzare $V \setminus S$ nei due domini $A =: V \setminus S \cap \{(x, 0, z, w)\}$ e $B =: V \setminus S \cap \{(0, y, z, w)\}$. Ancora $\inf_{V \setminus S} f = \min \left\{ \inf_A f, \inf_B f \right\}$.

Per $(x, y, z, w) \in A$ è $f(x, y, z, w) = \left(x, 0, z, \frac{1}{z}\right) = (x+z)^2 + \frac{1}{z^2} \geq 0$. Per $x = -z$, con $z^2 \rightarrow \infty$ si ottiene $\inf_A f = 0$. Analogamente per $y = \frac{1}{z}$ e $z \rightarrow 0$ si ha $\inf_B f = 0$.

Concludendo $\sup_V f = +\infty$, $\inf_V f = 0$.

(c) - si osserva che $W = V \cap \{(x, y, z, w) : x=0, y \geq 0, z > 0\}$, non potendosi annullare z su V .

Prima soluzione: $W = \{(x, y, z, w) : x=0, wz=1\} \cap \{(x, y, z, w) : z > 0\} \cap \{(x, y, z, w) : y \geq 0\}$, essendo $z > 0$ una condizione “aperta” non dà bordo. Il candidato bordo ∂W è quindi $\{(x, y, z, w) : x=0, wz=1\} \cap \{(x, y, z, w) : z > 0\} \cap \{(x, y, z, w) : y=0\}$. Lo è se gli spazi tangenti a W e a $\{y=0\}$ sono “trasversali”, cioè le equazioni dei piani tangenti sono indipendenti, ovvero i gradienti delle tre funzioni che si annullano sono indipendenti nei suoi punti. È ciò che avviene essendo i tre gradienti sul candidato bordo $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 0, \frac{1}{z}, z)$, $(0, 1, 0, 0)$.

Seconda soluzione: W è una superficie regolare in forma parametrica $H(y, z) = \left(0, y, z, \frac{1}{z}\right)$, $z > 0, y \geq 0$ definita su $[0; +\infty) \times (0; +\infty) =: Q$ un quadrante semiaperto di \mathbf{R}^2 .

Poiché H è restrizione di un diffeomorfismo definito su $\mathbf{R} \times (0; +\infty)$, se W fosse una 2-varietà lo dovrebbe essere anche Q . Ma le 2-varietà in \mathbf{R}^2 sono solo i sottoinsiemi aperti e Q non lo è.

- Il bordo di W è $W \cap S = \{(x, y, z, w) : x=0, y=0, zw=1, z > 0\}$.

— Infatti conviene vedere $W \setminus S$ corrispondente (permutando le variabili) al grafico di $K(y, z) = \left(0, \frac{1}{z}\right)$ definita su $y > 0, z > 0$. Quindi è una 2-varietà regolare.

— Invece conviene vedere $W \cap S$ come l'immagine mediante il diffeomorfismo $H(y, z) = \left(0, y, z, \frac{1}{z}\right)$, definito su tutto $\mathbf{R} \times (0; +\infty)$, della semiretta aperta $R = \{0\} \times (0; +\infty)$.

Tale R è bordo di Q , con parametrizzazione locale l'identità: poichè ogni palla B con centro $(0, z)$ e raggio strettamente minore di z se intersecata con Q da esattamente un semicerchio.