Analisi Matematica II, Anno Accademico 2017-2018.
Ingegneria Edile e Architettura
Vincenzo M. Tortorelli
FOGLIO DI ESERCIZI n. 8
OTTIMIZZAZIONE, PUNTI CRITICI, FUNZIONI CONVESSE

Gli esercizi contrassegnati con • sono piú impegnativi.
I riferimenti a prove in itinere e prove di esame si riferiscono all'insegnamento di Analisi Matematica 2 per il corso di laurea in Ingegneria Civile Ambientale, Edile, per gli anni accademici citati.

ESERCIZIO n.1 Usando metodi diretti (diseguaglianza di Cauchy-Schwartz) calcolare il valore minimo di $x^2 + y^2 + z^2 + w^2$ per $xyzw = 1$. Calcolarne poi l'estremo superiore.

ESERCIZIO n. 2 a- Con metodo diretto e argomento sintetico determinare il triangolo inscritto in un cerchio che ha area massima.
b- Usando il calcolo differenziale con metodo indiretto risolvere lo stesso problema (Si tenga presente il significato geometrico del determinante, e si usino le coordinate polari dal centro del cerchio).

ESERCIZIO n.3 Dato un foglio rettangolare di cartone, ritagliare dai vertici 4 quadrati eguali in modo da costruire una scatola parallelepipeda di volume massimo.

ESERCIZIO n.4 Determinare fra tutti i coni circolari circoscritti ad una sfera, quello di supercie laterale minima (ci si riduca oppotunamente ad un problema nel piano).

ESERCIZIO n. 5 a- Mostrare che la funzione $f(x, y) = x^4+y^2-3x+2y$ assume valore minimo su $\mathbf{R}^2$. Che dire del valore di massimo?

b- Mostrare che la funzione $f(x, y) = x^4 + y^2 - 3x + 2y - \log(x^2 + y^2 - 1)$ assume valore minimo sul suo dominio di definizione. Che dire del valore di massimo?

c- Mostrare che la funzione $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3x + 2y - \log xy$ assume valore minimo sul suo dominio di definizione. Che dire del valore di massimo?

ESERCIZIO n. 6 Determinare i punti critici (stazionari) delle seguenti funzioni: $x^3+(x-y)^2$, $x^4 + (x - y)^2$, $xy + y^2 - 3x$, $\sin(x + y)$, $x^2 - \sin y$, $x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$.

ESERCIZIO n. 7 Si dica se $(0, 0)$ è di massimo, di minimo, o di sella per ciascuna delle seguenti funzioni: $x^4 + y^4$, $x^4 - y^4$, $1 - x^4 - x^2y^2 - y^4$.

ESERCIZIO n.8 Si determinino se esistono il valore massimo $\mathbf{V_M}$ e il valore minimo $\mathbf{V_m}$ per la funzione $\dfrac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$.

ESERCIZIO n. 9 Determinare se esistono minimo e massimo delle seguenti funzioni nei rispettivi insiemi:

xy su $\{x^2 + y^2 \leq 1\}$
$x^2 + y^2 - (x + y)$ su $\{|x| \leq 1, |y| \leq 1\}$
$\frac{x^2y}{x^2+4y^2} + x$ per $xy > 0$ $xy + x$ per $xy \leq 0$ su $\{0 \leq y \leq 1, y^2 - 1 \leq x \leq 1\}$

ESERCIZIO n.10 Determinare nel caso esistano i valori di massimo e minimo assoluti in $\mathbf{R}^2$ della funzione $f(x,y) = (3x^2 - y^2)e^{-x^2-y^2}$.

ESERCIZIO n. 11 Sia $f(x,y) = 2x^4 - x^2e^y + e^{4y}$. Si calcolino l'estremo superiore e l'estremo inferiore di tale funzione e se ne calcoli il limite per $x^2+y^2 \to +\infty$. Si osservi che vi sono solo due punti di minimo assoluto e nessun altro punto critico. Si traccino approssimativamente le linee di livello $f = c$, al variare di c in $\mathbf{R}$, mettendo in risalto quali sono connesse, quali sono limitate.

ESERCIZIO n.12 (Secondo appello, prima parte, gruppo 1, es. 3, 2 Luglio 2015) Posto $f(x,y,z) = x^4 + y^3$, determinare i punti di massimo e minimo assoluto di f nell'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \max\{|x|,|y|\} = 1\}$, specificando quali di essi siano punti critici tangenziali (cioè stazionari vincolati).

ESERCIZIO n.13 (Appello straordinaro, es. 1(iii), 16 Novembre 2015) Si consideri la funzione
$f(x,y) = \dfrac{(x-y)^2}{2} - \dfrac{(x+y)^3}{3}$, $(x,y) \in D$
ove $D = \{(x,y) :\ 0 \le x,\ 0 \le y,\ 0 \le xy \le 1\}$

Si calcolino i valori di massimo e di minimo di f su D.

ESERCIZIO n.14 (Terzo appello, prima parte, es. 4, 20 Luglio 2015) Si classifichino i punti critici della funzione $f(x,y,z) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} + xyz$.

ESERCIZIO n.15 (Quarto appello, prima parte, es. 4, 11 Settembre 2015) Dati $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+4y}$ e $D = \{(x,y) :\ 0 \le x,\ 0 \le y,\ 0 \le xy \le 1\}$ si determinino se esistono: i punti P_M di massimo relativo e P_m di minimo relativo all'interno di D, i punti F_M di massimo relativo ed F_m di minimo relativo vincolati sulla frontiera di D.

ESERCIZIO n.16 (Test di autovalutazione, prima parte es. 8, dicembre 2014. Soluzione allegata.) Si determinino i valori $\mathbf{V_M}$ di massimo, $\mathbf{V_m}$ di minimo, per $f(x,y,z) = x^2 - yz$ sulla palla unitaria definita da $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$.

ESERCIZIO n.17 Si determinino se esistono il valore massimo e il valore minimo per la funzione $x^2 - 2y^2 + 3z^2$ sul vincolo definito da $xy = 1,\ yz + xz = 1$.

ESERCIZIO n.18 Studiare il tipo dei punti tangenziali della funzione $f(x,y) = 2x^2 + 2y^4 - x - y^2$ su $x^2 + y^2 = \dfrac{3}{4}$.

ESERCIZIO n.19 (Primo appello, prima parte es. 5, 11 Giugno 2015) Si determinino se esistono il valore massimo $\mathbf{V_M}$ e il valore minimo $\mathbf{V_m}$ per la funzione $f(x,y,z) = xz - zy$ sul vincolo dato dall'equazione $xy + x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

ESERCIZIO n.20 (Prima prova in itinere, seconda parte es. 2(b), 26 Febbraio 2015.
Cfr. anche ESERCIZIO 16 e soluzione allegata.)
Si calcolino tutti i punti critici tangenziali per la funzione f nell'insieme E' descritto da $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, e si determini la loro natura.

ESERCIZIO n. 21 Trovare i punti di massimo o di minimo relativo e calcolare i valori di massimo relativo e minimo relativo, delle seguenti funzioni sui domini rispettivi:

$f(x,y) = \frac{x^4+2x^3y}{x^4+y^4}$, $y - x^2 = 0$; $f(x,y) = \sin((x-2)^2 + y^2)$, $(1-x)^3 + y^2 = 0$;

$f(x,y) = x^2 + 6xy + 3y^2$, $x^2 + y^2 - 2xy = \frac{1}{(x+y-2)^2}$;

$f(x,y,z) = e^{-(x^2-y+z^2)}$, $\frac{x^2}{4} + y^2 + 3z^2 \leq 1$;

- $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, $\begin{cases} (z+1)^2 - y^2 - (x+3)^2 = 0 \\ z^2 + y^2 - (x+1)^2 = 0 \\ z > -3 \end{cases}$;

- $f(x,y,z) = (x+1)^2 + (y-\varepsilon)^2 + z$, $\begin{cases} (1-x)z = (1+x)y \\ z^2 + y^2 - (x+1)^2 = 0 \\ z > -3 \end{cases}$;

$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2$, tetraedro di vertici $(-1,-1,-1)$, $(1,-1,-1)$, $(0,1,-1)$, $(0,0,1)$;

$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2$, $\max\{|x+2|, |y+3|, |z+4|\} = 1$;

$f(x,y,z,w) = 4x^2 + 2(z-w)^2$ $\begin{cases} (x+y+z+w)^2 + (x-y+z-w)^2 = 1 \\ (x-y-z+w)^2 + (x-y-z-w)^2 = 1 \end{cases}$

ESERCIZIO n. 22 Sia data un insieme di coppie $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq N}$. Determinare a e b in modo tale che la funzione:

$\chi^2(a,b) = \sum_{i=1}^{N} (y_i - ax_i - b)^2$ sia minima. Il minimo è assoluto o relativo?

ESERCIZIO n. 23 Provare che l'insieme $D = \left\{ (x,y,z) : \frac{\sqrt{x^2+\frac{y^2}{2}} - 3}{4} + z^2 = 1 \right\}$ è chiuso e limitato. Determinare poi la massima e la minima distanza dei punti di D dall'origine.

ESERCIZIO n. 24 a- Trovare il massimo volume di un parallelepipedo rettangolo inscritto nell'ellissoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$.

b- Trovare l'ellissoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ di volume ($\frac{4}{3}\pi abc$) massimo per cui $a + b + c = M$, $a, \ b, \ c > 0$.

c- Trovare la minima distanza tra gli insiemi

$$\{x^2 + y^2 = 1\} \cap \{yz = xz\} \quad \text{e} \quad \{z - y = 0\} \cap \{x + y + z = 1\}.$$

• ESERCIZIO n.25 Sia $\mathbf{O}$ l'insieme delle matrici $n \times n$ ortogonali (${}^tMM = Id$), e sia $f : \mathbf{O} \mapsto \mathbf{R}$ definita da $f(A) = \text{tr } A$. Si dimostri che esistono unici e si calcolino i punti di massimo e minimo di f.

ESERCIZIO n.26 Dato un vettore $x = (x_1, \dots x_n)$, tale che $x_i > 0$ per ogni i e $\sum_{i=1}^n x_i = 1$, si definisce $H(x) = -\sum_{i=1}^n x_i \log x_i$. Determinare il vettore che massimizza H.

• ESERCIZIO n. 27 È vero che il minimo valore di $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - x^2 + y^2$ su $(x - R)^2 + (y - R)^2 = 2R^2$ è sempre 0? Giustificare la risposta.

• ESERCIZIO n.28 (Test, seconda parte es. 3, dicembre 2014. Soluzione allegata.)
a) Avendo a disposizione $16cm^2$ di materiale, e volendolo utilizzare tutto per costruire una scatola a forma di parallelepipedo, si vogliono rinforzare i bordi con un nastro. Qual'è la lunghezza minima, in cm, di nastro che necessita?
b) Cosa dire della lunghezza massima?
c) Avendo anche a disposizione 20 cm di nastro, e volendo utilizzare tutto il materiale, qual'è il volume massimo che si può ottenere?

NOTA - Un insieme $C \subseteq \mathbf{R}^d$ è detto *convesso* se contiene interamente i segmenti delimitati dai suoi punti: se $x \in C$, $y \in C$ e $\lambda \in [0; 1]$ allora $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$.

- La *parte interna relativa*, *chiusura relativa* e la *frontiera relativa* di un sottoinsieme C di $\mathbf{R}^d$ convesso, coincidono con la parte interna, la chiusura e la frontiera di C come sottoinsieme del più piccolo sottospazio affine di $\mathbf{R}^d$ che lo contiene (se $p \in C$ è $p+V$ ove V è il sottospazio vettoriale generato da $C - p$). Esse si indicano rispettivamente con iC, cC, bC.

- Una funzione $f : C \to \mathbf{R}$, $C \subseteq \mathbf{R}^d$, si dice *convessa* se C è convesso e se $\lambda \in [0; 1]$ allora $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$.

(Ciò vuol dire che le corde tra due punti del grafico di f son sopra al grafico di f ristretta al segmento che è proiezione ortogonale della corda in questione sul dominio C).

Equivalentemente: il sopragrafico di f : $\{(x, y) \in C \times \mathbf{R} : \ f(x) \leq y \}$ sia convesso.

- La funzione si dirà *strettamente convessa* se inoltre per $0 < \lambda < 1$ vale $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$. (Ovvero il grafico di f non contiene segmenti).

ESERCIZIO n. 29 a- Sia Ω un aperto convesso di $\mathbf{R}^d$, e sia $f : \Omega \mapsto \mathbf{R}$ differenziabile. Dimostrare che f è convessa se e solo se, per ogni $x, y \in \Omega$: $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq 0$ dove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ rappresenta il prodotto scalare in $\mathbf{R}^n$.
b- Nelle stesse ipotesi si deduca che f è convessa se e solo se il suo grafico sta sopra ogni piano tangente ad esso.
c- Se poi f è C^2 si provi che f è convessa se e solo se la matrice Hessiana $Hf(x)$è semidefinita non negativa in ogni punto $x \in \Omega$.

ESERCIZIO n. 30 a- Sia $f : \Omega \subset \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ una funzione strettamente convessa, ove Ω è un aperto convesso. Si dimostri che f ha al più un punto estremale interno a Ω.
b- Una funzione continua convessa a valori reali, definita su $C = \bar{\Omega}$, con Ω aperto convesso limitato, assume valore massimo su $\partial\Omega$.
• c- Una funzione continua convessa a valori reali, definita su $C = \bar{\Omega}$, con Ω aperto convesso limitato, assume valore massimo solo su $\partial\Omega$ a meno che non sia costante.

ESERCIZIO n. 30bis a- Sia $f : E \subset \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ una funzione strettamente convessa, ove E è un convesso in $\mathbf{R}^d$ con $E = iE$. Si dimostri che f ha al più un punto estremale in E.
b- Una funzione continua convessa a valori reali, definita su E, con E convesso in $\mathbf{R}^d$ compatto, assume valore massimo su bE.
c- Una funzione continua convessa a valori reali, definita su E, con E convesso in $\mathbf{R}^d$ compatto, assume valore massimo solo su bE a meno che non sia costante.

ESERCIZIO n. 31 a- Se $u \in C^2(\mathbf{R}^n)$ e $\triangle u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} > 0$ allora u non ha punti di massimo locale.

- - Se $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, Ω aperto limitato, se $\triangle u \geq 0$ allora $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$.

(Si consideri x_0 di massimo su $\bar{\Omega}$ di u e $v(x) = u(x) + \varepsilon|x - x_0|^2$. Si applichi il precedente punto a v.)

- Si deduca che se $\triangle u \geq 0$ allora u non ha punti di massimo locale stretto.

- b- Si provi che se Ω é un aperto limitato, $f \in C(\mathbf{R}^n)$, $g \in C(\mathbf{R}^n)$ allora vi è *al più una* funzione u definita su $\overline{\Omega}$ che risolve:

$$\begin{cases} \triangle u(x) = f(x) & x \in \Omega \\ u(x) = g(x) & x \in \partial\Omega \\ u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega) \end{cases}$$

- Si provi che per questa eventuale soluzione si ha: $\max_{\overline{\Omega}} |u| \leq \max_{\partial\Omega} |g| + \frac{(\mathrm{diam}\Omega)^2}{2n} \max_{\overline{\Omega}} |f|$.

NOTA: Si può provare inoltre:
- se Ω è un *connesso* aperto (due suoi punti posson esser sempre congiunti da un cammino continuo sempre contenuto nell'aperto), $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $\triangle u \geq 0$, allora se u assume massimo in $\overline{\Omega}$ allora lo assume **solo** sul bordo $\partial\Omega$ oppure u é costante.
- se Ω è un connesso aperto, $u \in C^2(\Omega)$, $\triangle u = 0$, allora u non assume ne massimi ne minimi locali interni in Ω a meno che non sia costante.

ESERCIZIO n. 32 Utilizzando quanto dimostrato nel precedente esercizio si trovino tutte le soluzioni delle equazioni:

$$\begin{cases} \triangle u(x,y) = 0 & x^2 + y^2 < 1 \\ u(x,y) = \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^2 & x^2 + y^2 = 1 \\ u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega) & \Omega = \{x^2 + y^2 < 1\} \end{cases}$$

- $$\begin{cases} \triangle u(x,y) = 0 & \max\{|x|,|y|\} < \pi \\ u(x,y) = \sin x \cos y & \max\{|x|,|y|\} = \pi \\ u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega) & \Omega = \{\max\{|x|,|y|\} < \pi\} \end{cases}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO n.16. Risposta $\mathbf{V_M} = 1$, $\mathbf{V_m} = -\frac{1}{2}$
La funzione f è continua sul limitato chiuso dato da $g(x,y,z) =: x^2+y^2+z^2 \leq 1$ (preimmagine di un chiuso mediante funzione continua). Per il teoremi di Weiestrass e di Bolzano-Weiestrass vi sono punti in tale dominio cha e massimizzano e minimizzano f su di esso.

Si procede con metodo indiretto ad esaminare i punti che soddisfan le condizioni necessarie.

Non essendoci punti singolari interni per la funzione, ed essendo la frontiera $x^2+y^2+z^2=1$ del dominio una 2-varietà regolare in cui anche la funzione è regolare, gli unici punti su cui valutare la funzione son quelli: $\begin{array}{ll} A) & \textit{o stazionari interni} \\ B) & \textit{o stazionari tangenziali al bordo.} \end{array}$

A) $\nabla f(x,y,z) = (2x, -z, -y)$ si annulla solo in $(0,0,0)$. Tale punto non è ne essere di valore massimo locale ne di valore minimo locale poichè $f(0,0,0)=0$, ma $f(0,y,y)=y^2<0$, $f(0,y,-y)=y^2>0$ per $y\neq 0$. Figuriamoci di massimo o minimo assoluti.

B)Stazionarietà tangenziale: cioè gradiente della funzione ortogonale al tangente al vincolo (non c'è componente tangenziale della crescita): moltiplicatori di Lagrange: $\nabla f = \lambda \nabla g$

sul vincolo: $$(*)\begin{cases} 2x \;=\; \lambda 2x & (dx) \\ a-z \;=\; \lambda 2y & (dy) \\ -y \;=\; \lambda 2z & (dz) \\ 1 \;=\; x^2+y^2+z^2 & (V) \end{cases}$$

i) Deve essere $\lambda \neq 0$ se no si annullano le tre variabili e non si sta sul vincolo.
ii) Si osserva dalle (dy) , (dz) che $z=0 \Leftrightarrow y=0$. Se $y=z=0$ da (V) si ha che $x=\pm 1$.

$$f(\pm 1, 0, 0) \;=\; 1$$

iii) Si esamina il caso $yz\neq 0$ e $x=0$. Da (dy) e (dz) moltplicando in croce le due equazioni e dividendo per 2λ si ha $y^2=z^2$. Inoltre da (V) $2y^2=1$ per cui $y=z=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$f(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{1}{2}\ ,\ \ f(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2}\ ,\ \ f(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{1}{2}\ ,\ \ f(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2}$$

iv) Rimane il caso $xyz\neq 0$ che non è ammissibile: infatti dividendo per $2x$ la (dx) si ha $\lambda=1$ quindi usando (dy) e(dz) si otterrebbe $-z=2y=-2(-y)=-2(2z)=-4z$ cioè $z=0$.

Dovendoci esser punti di valore massimo e minimo, ed essendo sulla frontiera, i valori negli unici punti candidati sono 1, $\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$. Il massimo e il minimo tra questi sono $\mathbf{V}_M$, $\mathbf{V}_m$.

UN'ALTRA SOLUZIONE si basa sulla 2-omogeneità delle funzioni.
1)$\equiv$ A) Sono richiesti *solo i valori critici tangenziali* $f(x,y,z)$ non i punti (x,y,z) soluzioni di (*).
2) I valori critici tangenziali di f su $\{g=k\}$ con f pos. p-omogenea e g pos. q-omogenea sono $\mathbf{V}_c = \frac{q}{p}\lambda\ k$. Quindi conviene trovare *solo i* λ.
3) Ma la *parte differenziale* (dx), d(y), (dz) del sistema di Lagrange (*) è nel caso un sistema lineare omogeneo con parametro λ:

$$(*)\begin{pmatrix} 2\ -\ \lambda 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda 2 & -1 \\ 0 & -1 & -\lambda 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Basta quindi trovare i λ che annullano il determinante $2(1-\lambda)(4\lambda^2-1):\ \lambda=1,\ \lambda\pm\frac{1}{2}$.

SOLUZIONE ESERCIZIO n. 28. Risposta: a) $2\sqrt{6}cm$ b) Infinita c) $\dfrac{112}{27} \sim 4.148$

a) Siano $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$ le "dimensioni" (anche degeneri) della scatola. La superficie della scatola sarà quindi $S(x,y,z) = 2xy + 2xz + 2yz$, il perimetro degli spigoli $P(x,y,z) = 4x + 4y + 4z$. Si tratta quindi del problema di ottimizzazione sul dominio $D = \{(x,y,z) :\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ S(x,y,z) = 16\}$:

$$(P) \begin{cases} \min P(x,y,z) = 4x\ +\ 4y\ +\ 4z \\ \frac{1}{2}S(x,y,z) = xy\ +\ xz\ +\ yz\ =\ 8 \\ x \geq 0\ ,\quad y \geq 0\ ,\ z \geq 0 \end{cases}$$

Si sceglie la risoluzione indiretta cercando il valore minimo di S tra:

- i *valori dei punti stazionari tagenziali* al vincolo $S = 16$ nell'aperto $x > 0,\ y > 0,\ z > 0$,

-i *valori stazionari tangenziali* dei problemi vincolati bidimensionali ottenuti con $x = 0$ o $y = 0$ o $z = 0$, che non presentano ulteriori problemi di bordo.

Il problema è simmetrico nelle tre variabili basterà solo uno di questi casi, e.g. $x = 0$: la soluzione è il minimo tra i valori critici dei seguenti problemi, uno all'*interno* l'altro al *bordo* :

$$(Pi) \begin{cases} P(x,y,z) = 4x\ +\ 4y\ +\ 4z \\ \frac{1}{2}S(x,y,z) = xy\ +\ xz\ +\ yz\ =\ 8 \\ x > 0\ ,\quad y > 0\ ,\ z > 0 \end{cases} \qquad (Pb) \begin{cases} P_b(y,z) =: P(0,y,z) =\ 4y\ +\ 4z \\ \frac{1}{2}S_b(y,z) =: \frac{1}{2}S(0,y,z) =\ yz\ =\ 8 \\ y > 0\ ,\ z > 0 \end{cases}$$

1) ESISTENZA. Per applicare tale metodo bisogna prima sincerarsi che il minimo esista. Osservando che la funzione S è continua conviene ridursi alle ipotesi del teorema di Weiestrass. Il dominio D è chiuso perchè è intersezione di preimmagini di chiusi mediante funzioni continue, ma non è limitato: $y = \dfrac{1}{n}\ ,\quad z = \dfrac{1}{n},\quad x = (8 - \dfrac{1}{n^2})\dfrac{n}{2}$

- Si mostra che, se $S(x,y,z) = 16$, per $x^2 + y^2 + z^2$ grande $P(x,y,z)$ è maggiore di un valore a piacere tra quelli da essa assunti.
Infatti per $x^2 + y^2 + z^2 \to \infty$ si ha addirittura $P(x,y,z) \to +\infty$:
se $x^2 + y^2 + z^2 \geq R^2$ almeno uno dei tre addendi deve essere *maggior o eguale a* $\frac{R^2}{3}$: quindi $P(x,y,z) \geq \frac{4R}{\sqrt{3}}$ che scegliendo $R > 5\sqrt{3}$ sarà maggiore di $P(1,2,2) = 20$.
Pertanto si può supporre $x^2 + y^2 + z^2 \leq 75$ e usare il teorema di Weiestrass.

2) VALORI CRITICI. Poichè il valore minimo esiste i punti di minimo saranno o su $D \cap \{(x,y,z) : xyz \neq 0\}$ o su $D \cap \{(x,y,z) : xyz = 0\}$, e come detto per la simmetria del problema interessandoci solo il *valore minimo* quest'ultimo caso si riduce a $D \cap \{(x,y,z) : x = 0\}$: nel caso il punto di minimo di (P) sarebbe a maggior ragione punto di minimo di (Pb). Poichè in entrambi i casi la funzione è regolare il vincolo è nelle ipotesi del Dini:

$$\nabla S(x,y,z) = (y+z, x+z, x+y) = (0,0,0) \iff y = -z = x = -y \iff x = y = z = 0$$

$$\nabla S_b(y,z) = (z,y) = (0,0) \iff y = z = 0$$

si impostano i sistemi di Lagrange per trovare i valori critici tangenzali per (Pi) e per (Pb)

$$(L_i)\begin{cases} 4 &= \lambda(y+z) \qquad (dx) \\ 4 &= \lambda(x+z) \qquad (dy) \\ 4 &= \lambda(x+y) \qquad (dz) \\ & xy+xz+yx=8 \\ & x>0\ ,\quad y>0\ ,\quad z>0 \quad (V) \end{cases} \qquad (L_b)\begin{cases} 4 &= \lambda z \qquad (dy)_b \\ 4 &= \lambda y \qquad (dz)_b \\ & yz=8\ ,\quad y>0\ ,\quad z>0 \quad (V)_b \end{cases}$$

(L_i): deve essere $\lambda \neq 0$ pertanto moltiplicando in croce le relazioni (dx) e (dy), (dy) e (dz), e dividendo per 4λ si ottengono $x+z=y+z$ e $x+y=x+z$ pertanto $x=y=z$.Quindi da (V) $x^2=y^2=z^2=\dfrac{8}{3}$, per cui il valore critico è $3\sqrt{\dfrac{8}{3}}=2\sqrt{6}$.

(L_b): deve essere $\lambda \neq 0$, come sopra si ottiene $y=z$ e quindi $y^2=8$ pertanto il valore critico è $4\sqrt{2}$.

3) CONFRONTO: poichè il valore critico $2\sqrt{6}$ è minore del valore critico $4\sqrt{2}$, la minima lunghezza del nastro necessaria per rinforzare gli spigoli è $2\sqrt{6}cm$.

b) Un parallelepipedo di superficie laterale assegnata $2xy+2xz+2xy=16cm^2$ può avere lunghezza degli spigoli arbitrariamente grande $y=\dfrac{1}{n}$, $z=\dfrac{1}{n}$, $x=(8-\dfrac{1}{n^2})\dfrac{n}{2}$:
$x+y+z=4n-\frac{1}{2n}+\frac{2}{n}$.

c) Il problema è
$$(P)\begin{cases} \max V(x,y,z) \ =:\ xyz \\ \frac{1}{2}S(x,y,z)=xy\ +\ xz\ +\ yz\ =\ 8 \\ \frac{1}{4}P(x,y,z)=x+y+z\ =\ 5 \\ x\geq 0\ ,\quad y\geq 0\ ,\ z\geq 0 \end{cases}$$

0) CONSISTENZA: il vincolo è non vuoto $y+z=5-x$, $yz=8-x(5-x)$ per $x=2$ quindi $y+z=3$, $yz=2$ per cui son soluzioni $y=2$ e $z=1$.

1) ESISTENZA: la funzione è continua, e il vincolo è chiuso perchè preimmagine di chiusi mediante funzioni continue. Poichè $x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$ si ha $5=x+y+z\geq\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ quindi è anche limitato. Per Weiestrass esiste il valore massimo.

2) VALORI CRITICI. Poichè $V(x,y,z)=xyz\geq 0$ sul vincolo ed è nulla se una delle variabili si annulla il problema di massimo (P) è equivalente a

$$(P_i)\begin{cases} \max V(x,y,z) \ =:\ xyz \\ \frac{1}{2}S(x,y,z)=xy\ +\ xz\ +\ yz\ =\ 8 \\ \frac{1}{4}P(x,y,z)=x+y+z\ =\ 5 \\ x>0\ ,\quad y>0\ ,\ z>0 \end{cases}$$

La funzione è regolare e il vincolo è nelle ipotesi del teorema del Dini

$$rango\,(\nabla S(x,y,z)\nabla P(x,y,z)) \;=\; rango\begin{pmatrix} 2y+2z & 4 \\ \\ 2x+2z & 4 \\ \\ 2x+2y & 4 \end{pmatrix} \;=\; 1 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow y+z=x+z=z+y \Longleftrightarrow x=y=z \Longrightarrow 3x^2=8\ ,\quad 3x=5 \text{ ma } \frac{25}{3}\neq 8,$$

quindi si imposta il sistema di Lagrange (si osservi che la funzione di vincolo $yz+xz+xy$ è la somma delle derivate parziali prime della funzione xyz da massimizzare, e la seconda funzione di vincolo $x+y+z$ è la metà della somma delle derivate prime di $yz+xz+xy$ ... come dire che l'area è la "derivata" del volume e il "perimetro" è la "derivata" dell'area):

$$(L_i)\begin{cases} yz \;=\lambda(y+z)+\mu & (dx) \\ \\ xz \;=\lambda(x+z)+\mu & (dy) \\ \\ xy \;=\lambda(x+y)+\mu & (dz) \\ \\ \quad xy+xz+yx=8\ ,\quad x+y+z=5 & \\ \quad x>0\ ,\quad y>0\ ,\quad z>0 & (V) \end{cases}$$

i- sommando le relazioni differenziali ed usando le condizioni di vincolo si ottiene

$$8 \;=\; 10\lambda+3\mu$$

moltiplicando rispettivamente per x, y, z le relazioni differenziali (dx), (dy), (dz) e sommando si ottiene il valore critico in funzione dei moltiplicatori (fatto generale [**Lezione** 17/12/2014])

$$3V_{\lambda,\mu}=3xyz \;=\; 16\lambda+5\mu \;=\; -\frac{2}{3}\lambda+\frac{40}{3} \;=\; \frac{64}{5}+\mu$$

ii- Se $\lambda=0$ dalle relazioni differenziali si ottiene $yz=\mu=xz=xy$.
Per cui (essendo non nulli) deve essere $x=y=z$, caso già escluso in quanto non soddisfa le condizioni di vincolo.

Se $\mu=0$, $\lambda\neq 0$ dividendo a coppie le relazioni differenziali ancora si ha $xy=xz=yz$.

iii- Per $\lambda\mu\neq 0$ dividendo (dx) per (dy) si ottiene $\lambda(xy+zy)+y\mu=\lambda(xy+xz)+x\mu$ e

$$\lambda z(y-x) \;=\; -\,\mu(y-x)$$

analogamente usando le altre coppie di relazioni si ottengono

$$\lambda y(z-x) \;=\; -\,\mu(z-x)\ , \qquad\qquad \lambda x(z-y) \;=\; -\,\mu(z-y)$$

a- $y=x$: dalle condizioni di vincolo si ha $z=5-2x$, $x^2+2xz=8$ quindi

$$x^2-\tfrac{10}{3}x+\tfrac{8}{3} \;=\; 0 \iff x=x_1=:2 \;o\; x=x_2=:\frac{4}{3}$$

da cui si hanno i seguenti valori critici $V_1=\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{4}{3}\cdot(5-2\dfrac{4}{3})=\dfrac{112}{27}$, $V_2=2\cdot 2\cdot(5-4)=4$
Tali valori si ottengono anche assumendo $x=z$ o $y=z$.

b-$y\neq x$, $z\neq x$, $y\neq z$: deve essere $\lambda\, z \;=-\mu$, $\lambda\, y \;=-\mu$, $\lambda\, x \;=-\mu$: cioè $x=y=z$.

3) CONFRONTO: i valori di interesse sono 4, $\dfrac{112}{27}$ ma $27\cdot 4=108$ pertanto il valore massimo cercato è $\dfrac{112}{27}\sim 4.148$.