Analisi Matematica II, Anno Accademico 2017-2018.
Ingegneria Edile e Architettura
Vincenzo M. Tortorelli
FOGLIO DI ESERCIZI n. 9
LIMITI DI INTEGRALI

Gli esercizi contrassegnati con $\bullet$ sono piú impegnativi.

Esercizio 1 Calcolare il limite per $n \to \infty$ di

$$m_2\left(\left\{(x,y) : \frac{1}{n} \le x \le 2 - \frac{1}{n},\ 0 \le y \le 1 - \frac{1}{1+nx}\right\}\right).$$

Esercizio 2 Calcolare gli eventuali limiti per $n \to \infty$ dei seguenti integrali:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin nx}{x^2+n^2} dx\ ,\quad \int_{\{x^2+y^2+z^2\le 1\}} \frac{nxyz+n^2}{x^2+y^2+z^2+n^2} dxdydz\ ,\quad \int_0^{\pi} \frac{n\sin x + x}{\sin x + n} dx\ .$$

$$\int_0^2 \frac{nx+3\sqrt{n}x^2}{(nx+2)\sqrt{|x-1|}}\, dx\ ,\quad \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{|\sin x|^n}{x^a}\, dx \quad (a>1)\ ,\quad \int_0^{\infty} \frac{nx-e^{2x}}{x^2e^x+ne^{3x}}\, dx.$$

$$\int_0^n \frac{\operatorname{artan} x}{1+(x-n)^2}\, dx\ ,\quad \int_{\alpha}^{\infty} \frac{xe^{-nx}}{1+e^{-nx}}\, dx,\ \alpha \in [-\infty;+\infty)\ ,\quad \int_0^n\int_0^n \frac{nx^3+sinny}{\frac{n}{y^3}+2-\cos nx} e^{-x^4-y^4}\, dxdy.$$

Esercizio 3 Mostrare che: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_1^n \frac{\operatorname{artan}(xn)}{1+(n-x)^2}\, dx = \frac{\pi^2}{4}$, $\bullet \displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} \sqrt[n]{n+x^2}e^{-\frac{nx}{n+1}}\, dx = 1$.

Esercizio 4 Calcolare se esistono:

a- $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{1+x^{2n}}}\, dx$. [Spezzare il dominio ed usare funzioni dominanti diverse].

b- $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{n} \frac{1}{x^{-n}+x^2}\, dx$, (es.13) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty} \frac{nx+x^2}{1+nx^{\frac{3}{2}}}\, e^{-\sqrt{x}}\, dx$,

$\bullet$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_a^{\infty} \frac{xe^{-nx}}{1+e^{-nx}}\, e^{-\sqrt{x}}\, dx$ (al variare di $a \in [-\infty;+\infty[$).

[Su parte del dominio si usi convergenza monotona, sul rimanente dominata].

Esercizio 5 a- Fissato $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ si calcoli $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x,y) = \frac{n}{\sqrt{n+(x-n)^2+(y-n)^2}}$.

b- Si calcoli $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1\left(\int_0^1 f_n(x,y)\, dy\right) dx$.

Esercizio 6 Sia $f_n(x) = \left(\dfrac{n+x}{n+2x}\right)^n$, $n \in \mathbf{N}$, $x > 0$. Mostrare che $f_n(x) \ge f_{n+1}(x)$. Studiare il limite per $n \to \infty$ di $f_n(x)$. Si può passare al limite "sotto segno di integrale" nei seguenti integrali $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)e^{\frac{x}{2}}\, dx$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)e^{-\frac{x}{2}}\, dx$?

Esercizio 7 Studiare la derivabilità a destra in $t = 0$ della funzione $\mathcal{I}(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{1}{1+x^2}\, dx$.

Esercizio 8 a- Ove son derivabili $\quad G(x) = \displaystyle\int_{-|x|}^{|x|} \cos\sin(xt)\, dt$, $\quad H(x) = \displaystyle\int_{-|x|}^{|x|} \sin\sin(xt)\, dt$?
Ove lo siano calcolare la derivata.
b- Calcolare il limite per $x \to 0^+$ della funzione $\displaystyle\int_{x\log x}^{x^3} \sin\sin(xt)\, dt$.
c- Calcolare il limite per $x \to 0^+$ della funzione $\displaystyle\int_{\log x}^{x^3} \sin\sin(xt)\, dt$.

Esercizio 9 a- Si consideri, per $y > 0$ la funzione $f(x, y) = \dfrac{1}{y}\displaystyle\int_0^y e^{-(x-s)^2} ds$: si provi che $f(x, y) \to 0$ uniformemente in $x \in \mathbf{R}$ per $y \to +\infty$. b- Si calcoli $\lim_{y\to+\infty} \int_{\mathbf{R}} f(x, y) dx$.

Esercizio 10 a- Dati $A, B \in \mathbf{R}$ si calcoli $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_A^B \cos(nt)\, dt$.

b- Se f è continua nulla fuori da un intervallo si calcoli $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_A^B f(t)\cos(nt)\, dt$.

• c- Se f è Lebesgue sommabile sulla retta si calcoli $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_A^B f(t)\cos(nt)\, dt$.

•**Esercizio 11** - (Premessa) a- e $0 < a < b$ allora $\frac{b}{a}$ non è razionale se e solo la successione di Euclide dei resti della divisione intera definita da

$$\begin{cases} & & a \ > r_0 \geq 0 & b = & N_0 a + r_0 & N_0 \in \mathbf{N} \\ r_1 = r_0 = 0 & \text{o} & r_0 > r_1 \geq 0 & a = & N_1 r_0 + r_1 & N_1 \in \mathbf{N} \\ r_2 = r_1 = 0 & \text{o} & r_1 > r_2 \geq 0 & r_0 = & N_2 r_1 + r_2 & N_2 \in \mathbf{N} \\ r_{n+1} = r_n = 0 & \text{o} & r_n > r_{n+1} \geq 0 & r_{n-1} = & N_{n+1} r_n + r_{n+1} & N_{n+1} \in \mathbf{N} \end{cases}$$

è strettamente decrescente (non definitivamente nulla) infinitesima
ovvero $\quad \inf\{Ha + Kb > 0 : H \in \mathbf{Z},\ K \in \mathbf{Z}\} = 0$.

b - Si provi che se $0 < z < 2\pi$ e $\frac{\pi}{z}$ non è razionale allora l'insieme descritto al variare di $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$ da $nx\ + 2k\pi$ è denso in $\mathbf{R}$.

c- Fissato $x \in \mathbf{R}$ si provi che per ognuna delle successioni $\sin nx$, $\cos nx$, con $n \in \mathbf{N}$, si ha: se $x \in \mathbf{Z}2\pi$ sono costanti, se $x \in \mathbf{Q}2\pi$ sono periodiche, se $x \notin \mathbf{Q}2\pi$ sono dense in $[-1; 1]$.

Esercizio 12 Calcolare se esiste $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{]0;1[} f_n(x)\, dx \quad$ ove $\begin{cases} f_0(x) \ = & x & x \in]0;1[\\ f_{n+1}(x) \ = & [f_n(x)]^x & x \in]0;1[\end{cases}$

Esercizio 13 a- Data una successione di numeri a_n, $n \in \mathbf{N}$ si definisca $f(x) = a_{[x]}$, per $x \geq 0$, essendo $[x]$ la parte intera di x. Si esprima $\int_0^7 f(x)\,dx$ in termini della successione.

b- Se $a_{n+1,m} \geq a_{n,m} \geq 0$ per $n,\ m \in \mathbf{N}$ allora $\lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m} \ = \ \sum_{m=0}^{\infty} \Big(\lim_{n\to\infty} a_{n,m}\Big)$.

c- Se $|a_{n,m}| \leq b_m$ per $n,\ m \in \mathbf{N}$, $\sum_{m=0}^{\infty} b_m < +\infty$, e $\exists lim_{n\to\infty} a_{n,m} =: c_m$ allora $\lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m} \ = \ \sum_{m=0}^{\infty} c_m$.

d- Se $\left|\sum_{k=0}^{n} a_{k,m}\right| \leq b_m$ per $n,\ m \in \mathbf{N}$, $\sum_{m=0}^{\infty} b_m < +\infty$, e $\sum_{k=0}^{\infty} a_{k,m}$ sono convergenti allora

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{k,m} \ = \ \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{k,m}.$$

e- Se $a_{k,m} \geq \ 0$ allora $\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{k,m} \ = \ \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{k,m}$.

<u>Nota</u> cfr. FT5- **Successioni di Cauchy:**, - una successione $x : \mathbf{N} \to E$, E munito della distanza d, si dice di Cauchy se $\forall\varepsilon$ vi è un $N \in \mathbf{N}$ per cui per ogni $h,\ k \geq N$ si ha $d(x_h, x_k) \leq \varepsilon$,

- ovvero: $\lim_{N\to\infty} \sup_{h,\ k\geq N} d(x_h, x_k) = 0.$

- si può pensare ad una successione di Cauchy come a una successioni di misure sempre più *"affidabili"*, sempre più *precise*. Le successioni convergenti sono di Cauchy.
- Una successione di Cauchy è totalmente limitata. In particolare è limitata.

Completezza. - Un insieme E è *completo* con la distanza d se e solo se ogni successione di Cauchy a valori in E *converge* a qualche elemento di E. .

Teorema - Se E è completo per d, un sottoinsieme F di E è completo per d se e solo se è chiuso in E. Dimostrazione immediata.

Teorema - Gli spazi vettoriali $\mathbf{R}^N$, $N \in \mathbf{N}$, sono completi rispetto alla norma euclidea.

Teorema -Lo spazio vettoriale delle funzioni limitate definite su D a valori in $\mathbf{R}^N$ è completo rispetto alla norma uniforme $|f|_{Un(D)} = \sup_{x\in D} |f(x)|_{\mathbf{R}^N}$.

- Il sottospazio vettoriale delle funzioni continue e limitate definite su uno spazio metrico (M, d), a valori in $\mathbf{R}^N$, è completo rispetto alla norma uniforme (cioè è un sottospazio chiuso dello spazio delle funzioni limitate).

Teorema - Lo spazio vettoriale delle funzioni sommabili su $D \subseteq \mathbf{R}^M$ (misurabile), a valori in $\mathbf{R}^N$, è completo rispetto alla seminorma $|f|_{L^1(D)} = \int_D |f(x)|_{\mathbf{R}^N} dx$.

- Le funzioni $D \subseteq \mathbf{R}^M$ (misurabile), a valori in $\mathbf{R}^N$, con norma al quadrato sommabile su D sono uno spazio vettoriale,

- tale spazio è completo rispetto alla seminorma $|f|_{L^2(D)} = \sqrt{\int_D |f(x)|^2_{\mathbf{R}^N} dx}$.

Esercizio 14 Si studino le convergenze puntuale, uniforme ed in L^1 delle seguenti successioni di funzioni nei domini specificati

$f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^n},\ x \geq 0$; $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n},\ x \geq 0$; $f_n(x) = e^{-(x^n)},\ x \geq 0$; $f_n(x) = e^{-(x^n)},\ x \in \mathbf{R}$;

$f_n(x) = \left(\dfrac{1}{n} + (\sin x)^2\right)^n,\ x \in [0; 2\pi]$; • $f_n(x, y) = \dfrac{2^n(x+y)}{1+2^n(x^2+y^2)},\ 0 < x,\ y.$

Esercizio 15 (Criterio di CONVERGENZA TOTALE) Sia $(f_k)_{k\in\mathbf{N}}$ una successione in uno spazio (semi)-normato e completo (di Banach) $(F, \|\cdot\|)$. Si mostri che se

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} \|f_n\| \ < +\infty$$

allora la successione $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ converge nello spazio di Banach $(F, \|\cdot\|)$.

Esercizio 16 Si studino le convergenze puntuale, uniforme ed L^1:
$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{x}{2^n},\ x\in[0;2\pi];\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2},\ x\in\mathbf{R};\ \sum_{n=1}^{\infty} n(\sin x)^n,\ x\in[0;2\pi];\ \sum_{n=3}^{\infty}\left[\frac{1}{1+\sqrt{x}}\right]^n, x\geq 0;$
$\sum_{n=1}^{\infty}[\ \mathrm{artan}(nx+n) - \mathrm{artan}\ (nx)]\,,\ x\geq 0;\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n+y^n+ny},\ x^2+y^2\geq 1,\ x,\ y>0.$

Esercizio 17 a- La serie di funzioni $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{4^k+x^2}$ converge in $L^1(0;+\infty)$?

b- Date le funzioni misurabili f_k, $k\in\mathbf{N}$, non negative quasi ovunque in $\mathbf{R}^N$ si ha:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_{\mathbf{R}^N} f_k(x)dx\right) \ = \ \int_{\mathbf{R}^N}\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\right)\, dx$$

Esercizio 18 a- $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n^3}\frac{1}{k+n^2}$. b- Per quali a: $\lim_{n\to\infty}\int_{\{x^2+y^2\leq n^a\}}\frac{\mathrm{artan}(n(x^2+y^2))}{x^2+y^2+n^2}dxdy<\infty$?
[Per provare i casi di non finitezza: si scriva l'integrale come somma degli integrali su corone circolari di centro l'origine e disgiunte, riducendosi al punto a-].

Esercizio 19 Per ogni $p,\ q>0$ si provi che $\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}\,dx \ = \ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{p+kq}$.

Esercizio 20 a- La funzione continua $\frac{\sin x}{x}$ è Riemann integrabile in senso improprio su $]0;+\infty[$ ma non è assolutamente Riemann integrabile in senso improprio, anzi non è *Lebesgue integrabile* (tanto meno Lebesgue sommabile) .
[Si scriva l'integrale sulla semiretta come serie degli integrali su $[k\pi;(k+1)\pi]$ ottenendo una serie a segni alterni.]
b- Si calcoli $\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n\, dx.$
• c- La funzione $g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^k$ è ben definita per $x\neq 0$ Lebesgue misurabile ma non Lebesgue sommabile su $\mathbf{R}$. [Si studi $g(x)$ per $x\to 0^+$].

Esercizio 21 Se f è Lebesgue sommabile in $\mathbf{R}^N$ allora $\lim_{R\to+\infty}\int_{\{x\in\mathbf{R}^n:|x|\geq R\}} f(x)\,dx \ = \ 0.$
[Si scriva l'integrale di $|f|$ su $\mathbf{R}^n$ come serie degli integrali su corone sferiche N-dimensionali di centro l'origine disgiunte].

Esercizio 22 a- Per quali $a>0$ il seguente integrale esiste finito $\int_0^1\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^{x^{-2}-x^2}}{k^a+k^{-6}+1}dx$?

b- Per quali $a>0$ il seguente integrale esiste finito $\int_0^1\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^{x^{-2}-x^2}+\sin kx}{k^a+k^{-6}+1}dx$?