Analisi Matematica II, Anno Accademico 2017-2018.
Ingegneria Edile e Architettura

Vincenzo M. Tortorelli

FOGLIO DI ESERCIZI n. 10

CALCOLO DI INTEGRALI PER SEZIONE ED ITERAZIONE

Gli esercizi contrassegnati con • sono piú impegnativi

Esercizio 1 Calcolare gli integrali delle seguenti funzioni sui domini rispettivamente specificati:

$$x + x^2y,\quad [0;1]\times[2;4];\quad x+x^2y,\quad [-1;1]\times[-1;1];\quad x,\ 0\le y\le 1,\ y\le x,\ y\le 3-x;$$
$$x^2y - y^2x,\ [1;2]\times[-3;-1];\quad \sin(x+y),\ [0;\pi]\times[0;\pi];$$
$$xyz,\ [1;2]\times[1;3]\times[1;4];\quad xy^2z^3,\ [0;1]\times[0;2]\times[-1;3];$$
$$xyz,\ 0\le x\le y\le 1,\ 0\le z\le x^2+y^2;\quad |z|,\ |x|+|y|\le z\le 4;$$
$$f(x,y,z)=1,\quad x^2+z^2\le 1,\ y^2+z^2\le 1,\ 0\le z;$$
$$x_1x_2 + x_2x_3\cdots + x_{n-1}x_n,\ i\le x_i\le i+1, 1\le i\le n.$$

Esercizio 2 a- Calcolare l'integrale di xe^{y^2} su $\left\{(x,y) : 0\le x,y\le 2, \dfrac{x^2}{2}\le y\le x^2\right\}$.
b- Che dire per l'integrale su $\left\{(x,y) : 0\le x\le 1, \dfrac{x^2}{2}\le y\le x^2\right\}$.

Esercizio 3 Le seguenti funzioni sono integrabili nei domini rispettivamente specificati? Nel caso sommabili? Eventualmente si calcoli il valore degli integrali.

$$\frac{y}{1-xy},\ [0;1]\times[0;1];\quad \left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)[0;2]\times[0;2];\quad \frac{1}{x^2+y^3},\ y\le 0,\ x\ge 1.$$

Esercizio 4 Si calcolino:

$$\int_{0\le y\le x\le 1}(x+y)\,dxdy\ ;\quad \int_T e^{(1-y)^2}\,dxdy,\ T \text{ triangolo di vertici } (0,0),\ (0,1),\ (1,0)\ ;$$
$$\int_{[1;2]\times[2;4]}|3x-y|\,dxdy\ ;\quad \int_{0\le y\le x^2\le 2}|x-y^2|\,dxdy\ ;\quad \int_{1\le\max\{|x|,|y|\}\le 2}dxdy;$$
$$\int_{1\le\max\{x,y\}\le 2,\ 0<x,\ y}\max\{|x|,|y|\}dxdy;\quad \int_T e^{x+y}\,dxdy,\ T\quad \text{triangolo di vertici } (0,0),\ (1,2),\ (3,1).$$

Esercizio 5 Si calcolino: -mis. della regione definita da $0<x,\ y,\ z,\ \ 0<x+y+z<1$;
-mis. della regione delimitata dalle superficie $x=0,\ x=1,\ |y|=1,\ z=0,\ z=x^2+y^2$;
- mis. della regione nello spazio dleimitata dai piani $z=0$, $z=h>0$ $x=1$, $x=-1$, e dalla superificie ottenuta congiungendo i punti del segmento $(x,0,h)$, $|x|\le 1$, mediante segmenti a lui ortogonali, ai punti della circonferenza $x^2+y^2=1,\ z=0$.

Esercizio 6 Si calcolino:

$$\text{mis. } \{z^2\le x^2+y^2\le a^2+z^2\}\ ;$$
$$\text{mis. } \{0\le x^2-a^2\le y^2+z^2\le x^2\le 10\}\ ;$$
$$\text{-mis.}\{x^2+z^2\le 1,\quad y^2+z^2\le 1,\ 0\le z\ \}.$$

Esercizio 7 Si calcoli: $\displaystyle\int_A (xyz+yzw)dxdydzdw,\ \ A=\{0<x<x+w<z+y,\ 0<y,\ z\ <1\}$.

Esercizio 8 a- Si calcoli la misura della regione definita da $x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - 2x$;

b- Usando le coordinate polari $(\rho, \theta) \in (0; +\infty) \times [0; 2\pi)$ ed assumendo $dxdy = \rho d\rho d\theta$ si calcoli lo stesso integrale.

Esercizio 9 Calcolare usando il cambio di coordinate polari $(\rho, \theta) \in (0; +\infty) \times [0; 2\pi)$ con $dxdy = \rho d\rho d\theta$:

$$\int_{0<z<x^2+y^2<1} \left(e^{z-x^2-y^2} - 1\right) dxdydz \ ;$$

$$\int_A (xyz + yzw)\, dxdydzdw \ , \quad A = \{0 < x < x + w < z^2 + y^2 < 1\} \ .$$

Esercizio 10 (Guldino 1.0 cfr. FT22Bis) a) Si consideri $D = \{z \in I,\ 0 \leq r \leq f(z)\}$ con I intervallo e f misurabile non negativa; si denotino con (r_D, z_D) le coordinate del suo baricentro. Il volume del solido di rotazione per un angolo α di D attorno all'asse z è dato da:

$$V_z = \frac{\alpha}{2} \int_I f^2(z)\, dz \ = \ \alpha \cdot \text{Area}(D) \cdot r_D \ = \ \text{Area}(D) \cdot \text{lunghezza arco percorso dal baricentro} \ =$$

$$= \alpha \cdot \text{Area}(D) \cdot \text{distanza media dall'asse.}$$

b) Si provi che $\alpha \int_I z \cdot f(z)\, dz \ = \ \alpha \cdot \text{Area}(D) \cdot z_D$. Intuitivamente cosa rappresenta quest'ultimo integrale?

Esercizio 10bis - Calcolare il volume della regione ottenuta ruotando di un angolo giro, attorno all'asse $x = 0,\ y = 0$, il cerchio del piano $y = 0$ di centro $(R, 0, 0)$ e raggio $0 < r < R$ (Toro).

- Calcolare il volume della regione definita da $\dfrac{1}{z^4} \leq x^2 + y^2 \leq \dfrac{1 + z^{\frac{3}{2}}}{z^4}$.

- Calcolare il volume della regione data dalla rotazione attorno all'asse $x = y = 0$ della regione piana definita da $\dfrac{2}{\pi} x \leq z \leq \sin x$.

Esercizio 11 Per quali $\beta > 0$ il volume di $0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq \left(a^{2\beta} + z^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}}$ è finito?

• **Esercizio 12** Osservando che $\dfrac{\sin x}{x} = \sin x \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xy} dy$ si calcoli l'integrale *improprio* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$.

Esercizio 13 a) Se f è misurabile non negativa allora

$$\int f(x)dx = \int_0^{+\infty} m\{f > t\}dt.$$

b) Se $p > 0$ ed f è integrabile non negativa allora

$$\int_{\{f>a\}} f(x)^p dx = p \int_a^{+\infty} t^{p-1} m\{f > t\}dt \ + \ a^p m\{f > a\}.$$