Analisi Matematica II, Anno Accademico 2017-2018.
Ingegneria Edile e Architettura
Vincenzo M. Tortorelli
FOGLIO DI ESERCIZI n. 12
CAMPI CONSERVATIVI

Gli esercizi contrassegnati con • sono piú impegnativi

ESERCIZIO n.1 Per i seguenti campi e nei rispettivi domini riconoscere quelli conservativi e calcolarne una primitiva:
$(0; x)$ in $\mathbf{R}^2$; $(y-x, x+y)$ in $\mathbf{R}^2$; $(3x+y, x-2z, z-2y)$ in $\mathbf{R}^3$; $(3x^2y^2, 2x^3y^2)$, $(x,y) \in \mathbf{R}^2$;
$\left(\frac{-y}{(x^2+y^2)^p}, \frac{x}{(x^2+y^2)^p}\right)$; $\left(\frac{y}{(x^2+y^2)^p}, \frac{x}{(x^2+y^2)^p}\right)$, $p \in \mathbf{R}$ e $(x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus (0,0)$;
$\left(y^2 \cos x + z^3, 2y \sin x - 4, 3xz^2 + 2\right)$ in $\mathbf{R}^3$;
$\left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$, $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, $x > 0$; $\left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$, $1 < x^2+y^2 < 4$;
$\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$, $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$;
$\left(z - \frac{y}{x^2+y^2}, z + \frac{x}{x^2+y^2}, x+y+z\right)$, $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3, x^2+y^2 \neq 0$;

ESERCIZIO n.2 a- per quali $p,\ q \in \mathbf{R}$ il campo (px^2y^2, qx^3y) è conservativo in $\mathbf{R}^2$?
b- Calcolare il lavoro del campo (x^2y^2, x^3y) sulla circonferanza unitaria di centro l'origine orientata in senso antiorario
c- Calcolare il lavoro del campo $\left(y^2 \cos x + z^3, 2y \sin x - 4, 3xz^2 + 2\right)$ sulla curva
$(\cos 2t \sin t6t, \sin 4t - \cos 8t, \sin 6t)$, $0 \leq t \leq \pi$.

ESERCIZIO n.3 a- Per quali $p,\ q \in \mathbf{R}$ il campo $(pxy+z, x^2, qx+2z)$ ‘e conservativo su $\mathbf{R}^3$?
b- Calcolarne il lavoro lungo l'arco orientato da $(-1,2,0)$ a $(1-2\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})$ ottenuto intersecando il piano definito da $x+y+z=1$ e il cilindro definito da $y^2+z^2=4$.

ESERCIZIO n.4 Calcolare il lavoro del campo $\left(2x \sin \pi y - e^z, x^2 \pi \cos \pi y - 3e^z, -xe^z\right)$ lungo l'intersezione delle due superfici definite da $z = \log(1+x)$, $x = y$, orientata dall'origine a $(1, 1, \log 2)$.

ESERCIZIO n. 5 Calcolare il lavoro del campo

$$S(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right),\ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \text{ lungo}$$

a- $(2t, 4t+1)$, $t \in \mathbf{R}$;
b- la parabola grafico di $y = x^2 - 1$ orientato secondo le $x \in \mathbf{R}$ crescenti.

ESERCIZIO n.6 Calcolare il lavoro del campo

$$G(x,y,z) = \left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right),\ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\},$$

lungo $(\cos t, \sin t, t)$, $t \in \mathbf{R}$.

• ESERCIZIO n.7 Si consideri con i parametri polari $x = \rho\cos\theta$ e $y = \rho\sin\theta$, $\rho \geq 0$, $\theta \in \mathbf{R}$, e i versori ortonormali $\hat{\rho} = (\cos\theta, \sin\theta)$ e $\hat{\theta} = (-\sin\theta, \cos\theta)$: sistema di riferimento radiale in $(x, y) \neq (0, 0)$.
Dato un campo $v(x, y) = (v_x(x, y), v_y(x, y))$ si considerino le sue coordinate (v_ρ, v_θ) rispetto al sistema di riferimento radiale in $(0; 0)$ con la parametrizzazione polare:

$$v(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \;=\; v_\rho\hat{\rho} \;+\; v_\theta\hat{\theta}.$$

Si mostri che condizione necessaria affinchè il campo sia integrabile in $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ è

$$\frac{\partial v_\rho}{\partial\theta} - \rho\frac{\partial v_\theta}{\partial\rho} = v_\theta$$

$$\left[\qquad \text{Si ricordi che } \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \;=\; \hat{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} \;+\; \frac{\hat{\theta}}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}. \qquad \right]$$