Analisi Matematica II, Anno Accademico 2017-2018.
Ingegneria Edile e Architettura
Vincenzo M. Tortorelli
FOGLIO DI ESERCIZI n. 13
INTEGRAZIONE ORIENTATA DI CAMPI SU SUPERFICIE NELLO SPAZIO
ORIENTAZIONE INDOTTA SUL BORDO
TEOREMI DELLA DIVERGENZA E DI STOKES
Gli esercizi contrassegnati con • sono piú impegnativi

Orientazioni

ESERCIZIO n.1 Disegnare i seguenti insiemi 1-dimensionali connessi e regolari a pezzi. Dire quali sono regolari. Disegnare, se possibile, l'orientazione dal primo al secondo punto rispettivamente specificati.
i) $x - 3y = 3,\ x + y < 3,\ ((3, 0), (-3, -2))$; ii) $\max\{3|x|, |y|\} = 6,\ ((1, 6), (2, 3))$;
iii) $x^2 = y^3,\ ((-1, 1), (1, 1))$;
iv) l'unione dei sostegni di $(\cos t, \sin t, t),\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$, e $(\frac{\pi}{2} - t, 1, t),\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$, orientata da $(1, 0, 0)$ a $(0, 1, \frac{\pi}{2})$.

ESERCIZIO n.2 Per le frontiere dei seguenti aperti di spazi cartesiani si scriva, se definito, il versore normale di orientazione positiva (esterno) nei punti di frontiera rispettivamente specificati:
$x + y > 1,\ (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ (2, -1)$; $x + y + z < 1,\ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3,\ (3, -1, -1)$;
$x - y^2 < 1,\ (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ (5, 2)$; $5 < x^2 + y^2 < 13,\ (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ (3, 4)$ e $(1, 2)$;
$x^2 - y^2 < 9,\ (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ (5, 4)$; $x^2 - y^2 < 9,\ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3,\ (5, 4, 71)$;
$|x - 1| + |y - 2| < 2,\ (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ (2, 1)$ e $(-1, 2)$; $\max\{|x|, |y|, |z|\} < 4,\ (4, 4, 4)$ e $(1, 2, 4)$;
$x,\ y,\ z > 0,\ x + y + z < 6,\ (1, 2, 3),\ (4, 0, 2),\ (0, 0, 6)$;
$x^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 + (u - 3)^2 < 4, (x, y, z, u) \in \mathbf{R}^4,\ (1, 2, 3, 4)$;
$$x^2 + y^2 + z^2 < 16,\ (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 > 1,\quad (1, \sqrt{3}, 2\sqrt{3}),\quad \left(\frac{4 + \sqrt{3}}{4}, \frac{11}{4}, \frac{7}{2}\right);$$
$-1 < x^2 + y^2 - z^2 < 1,\ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3,\ (2, 2, 3)$ e $(1, 2, 2)$;
$$(x^2 + y^2)((x - 1)^2 + y^2) < 1,\ (x, y) \in \mathbf{R}^2,\quad \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

ESERCIZIO n.3 Per i seguenti aperti (regolari a tratti) del piano cartesiano si indichi graficamente l'orientazione tangenziale positiva delle frontiere ove defnita:
$x + y > 1$; $x + y < 1$; $x - y^2 < 1$; $x^2 - y^2 < 9$; $5 < x^2 + y^2 < 13$; $|3x + 1| + |2y - 3| < 4$
regioni aperte limitate dal sostegno del cammino $(\cos t, \sin 2t),\ 0 \le t \le 2\pi$.

ESERCIZIO n.4 Per le seguenti sottovarietà (regolari a pezzi) bidimensionali dello spazio cartesiano determinare: se sono orientabili, il bordo, e nel caso orientarlo positivamente rispetto all'orientazione coerente con il dato specificato:
i) per N nel punto $(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}) = N(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}) =$ versore di $-(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, 2)$:
$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$; $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1, x + 2y + 3z \le 1$; $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1, x + 2y + 3z \le 6$;
ii) per $N(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$ l'unione dei tre pezzi definiti da:
$1 \le x^2 + y^2 \le 4$ e $z = 1$, $x^2 + y^2 = 1$ e $0 \le z \le 1$, $x^2 + y^2 = 4$ e $0 \le z \le 1$;

iii) per $N(0^+,0^+,0^+) = (0,-1,0)$ l'unione dei sostegni delle superfici con $0 \le u,\ v \le 1$:
$(1-v)\cdot u\cdot(0,0,1) + v\cdot((1-u)\cdot(1,0,0)+u\cdot(1,1,0))$,
$(1-v)\cdot((1-u)\cdot(1,0,0)+u\cdot(1,1,0)) + v((1-u)\cdot(-2,1,0)+u\cdot(-2,1,-1))$,
$(1-v)\cdot((1-u)\cdot(-2,1,0)+u\cdot(-2,1,-1)) + v\cdot((1-u)\cdot(-1,-1,0)+u\cdot(-1,-2,0))$,
$(1-v)\cdot((1-u)\cdot(-1,-1,0)+u\cdot(-1,-2,0)) + v\cdot u\cdot(0,0,1)$);

iv) per $N(0^+,0^+,0^+) = (0,-1,0)$ l'unione dei sostegni delle superfici con $0 \le u,\ v \le 1$:
$(1-v)\cdot u\cdot(0,0,1) + v\cdot((1-u)\cdot(1,0,0)+u\cdot(1,1,0))$,
$(1-v)\cdot((1-u)\cdot(1,0,0)+u\cdot(1,1,0)) + v\cdot((1-u)\cdot(-2,1,0)+u\cdot(-2,1,-1))$,
$(1-v)\cdot((1-u)\cdot(-2,1,0)+u\cdot(-2,1,-1)) + v\cdot(1-u)(0,0,1)$;

v) per $N(2,0,-1) = (0,0,1)$, $(\sqrt{x^2+y^2}-2)^2 + z^2 = 1,\ z \le 0,\ x+y \le 2$.

ESERCIZIO n. 5 Per le seguenti superfici parametriche semplici regolari definite su domini regolari a tratti, orientando il dominio e la sua frontiera in maniera positiva, che orientazione viene indotta sul sostegno e sul suo bordo?

i) $\Phi : \{(x,y) : 1 \le x^2+y^2 \le 4\} \to \mathbf{R}^3$, $\Phi(x,y) = \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \sqrt{x^2+y^2}\right)$;

ii) $\Phi : \{(x,y) : 1 \le x^2+y^2 \le 4\} \to \mathbf{R}^3$, $\Phi(x,y) = \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 3-\sqrt{x^2+y^2}\right)$;

iii) $\Phi : [0;2\pi]\times[1;2] \to \mathbf{R}^3$, $\Phi(x,y) = (\cos\theta, \sin\theta, z)$.

Flussi

ESERCIZIO n.6 Si calcoli il flusso dei seguenti campi di vettori attraverso le rispettive sottovarietà (regolari a pezzi) orientate [N.B. per i campi piani non confondere il flusso di una campo attraverso una curva orientata con il lavoro del campo sulla stessa]:

i) $F(x,y) = (x,y)$, $G(x,y) = (-y,x)$, triangolo antiorario di vertici $(0,0)$, $(2,1)$, $(1,3)$;

ii) (x, e^y) sul grafico di $f(x) = \dfrac{1}{x},\ x \ge 1$, nel verso delle x crescenti;

iii) (x,y,z) dalla frontiera con normale esterna, del cilindro definito da $x^2+y^2 \le 4,\ 3 \le z \le 4$;

iv) (x,y,z) dalla frontiera con normale esterna, del cubo definitoda $|x|,\ |y|,\ |z| \le 3$;

v) $(yz, -xz, x^2+y^2)$ dal sostegno di $\Phi(u,v) = (e^u\cos v, e^u\sin v, u),\ 0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le \pi$ con normale avente terza componente non negativa;

vi) (y^3, z^2, x) dal grafico di $z = x^2-y^2$ per $x^2+y^2 \le 1,\ 0 \le x$ orientato da $N(0,0,0) = (0,0,-1)$;

vii) $(x^2, y^2, 1-z)$ dal grafico di $z = x^2+y^2$, per $x^2+y^2 \le 1$ orientato per z crescente.

ESERCIZIO n.7 Si consideri la superficie parametrica *non semplice*
$\Phi(u,v) = (\sin 2u(2-v\sin u), \cos 2u(2-v\sin u), v\cos u),\ 0 \le u \le 2\pi,\ -1 \le v \le 1$.
Mostare che *per ogni* campo vettoriale $F = F(x,y,z)$ si ha:

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}\left(F_o\Psi\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial u}\times\frac{\partial\Psi}{\partial v}\right)dudv \;=\; 0$$

Gauss-Green, divergenza e Stokes piano

ESERCIZIO n.8 Calcolare i seguenti integrali [N.B. per i campi piani non confondere il flusso di una campo attraverso una curva orientata con il lavoro del campo sulla stessa]:

i) $\displaystyle\int_{\{0\le x,\ y,\ x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\le 1\}} xy\ \ dxdy;$

ii) $\displaystyle\int_A dxdy$, A delimtato da $x=y$ e $(t^2+t, t+t^4),\ t\in[0;1]$;

iii) $\displaystyle\int_A xy\ \ dxdy$, A delimitato da $\left(\cos t, \dfrac{\sin 2t}{2}\right),\ |t|\le\dfrac{\pi}{2}$;

iv) $\displaystyle\int_A x^2\ \ dxdy$, A delimitato da $\left(\cos t, \dfrac{\sin 2t}{2}\right),\ |t|\le\dfrac{\pi}{2}$;

v) $\displaystyle\int_{\partial E^+}(x,y)$, E definito da $2x^2+4y^2\le 1$

vi) $\displaystyle\int_{\partial E^+}(x^3+y^4, x^4+y^3)$, E definito da $x^2+4y^2\le 4$;

vii) $\displaystyle\int_\Gamma(\sin x+3y^2, 2x-e^{-y^2})$, $\Gamma=\{(x,y): x^2+y^2=r^2, y\ge 0\}$, orientata in senso antiorario;

viii) $\displaystyle\int_\Gamma\left(e^{x^2}-ye^{y^2}, ye^{x^2}-xe^{y^2}\right)$, ove Γ è la frontiera del triangolo di vertici $(1,2)$, $(0,0)$, $(-1,2)$, orientata in senso antiorario;

ix) $\displaystyle\int_\Gamma\left(x\sin y^2-y^2, x^2y\cos y^2+3x\right)$, ove Γ è la frontiera del trapezio di vertici $(0,-2)$, $(1,-1)$, $(1,1)$, $(0,2)$, orientata in senso antiorario;

x) $\displaystyle\int_\Gamma\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$, Γ sostegno della curva definita in coordinate polari da $\rho=\theta^2$, $0\le\theta\le 2\pi$, orientata in senso antiorario;

x)bis $\displaystyle\int_A \operatorname{div}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) dxdy$, A delimitato dalla curva definita in coordinate polari da $\rho=\theta^2$, $0\le\theta\le 2\pi$, e dal segmento $(t,0)$, $0\le t\le 4\pi^2$.

ESERCIZIO n.9 Si calcoli l'area delle regioni aperte limitate che hanno frontiera parametrizzata dai seguenti cammini:

i) (cicloide) $[(t,1)-(\sin t,\cos t)]\oplus[(2\pi-t,0)],\ 0\le t\le 2\pi$; ii) $\sin 3\theta(\cos\theta,\sin\theta)$;

iii) (lemniscata) $\sqrt{\cos 2\theta}(\cos\theta,\sin\theta)$, $-\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{4}$, $\frac{3}{4}\pi\le\theta\le\frac{5}{4}\pi$ $(\rho^2=\cos^2\theta-\sin^2\theta)$.

ESERCIZIO n.10 Calcolare:

i) $\displaystyle\int_{\Sigma^N}(x,y,z)$, ove Σ^N è la sfera di raggio R e centro l'origine orientata da $N(0,0,1)=(0,0,1)$;

ii) $\displaystyle\int_{\partial A^+}(x,y,z)$, $A=\{(x,y,z): \max\{|x-2|,|y-3|,|z-4|\}<2\}$;

iii) $\displaystyle\int_{\Sigma^N}(x^2,y^2,1-z)$, ove Σ è definita da $x^2+y^2-z=0$, per $0\le z\le 1$ con $N(0,0,0)=(0,0,1)$;

iv) $\displaystyle\int_\Sigma(x^2+y^2)\,ds_2$, Σ la sfera di raggio r e centro l'origine;

v) il volume di un cono di vertice l'origine e base B piana misurabile;

vi) il flusso del gradiente di $f(x,y,z) = xy + z^2$ attraverso il triangolo di vertici $(a^2,0,0)$, $(0,b^2,0)$, $(0,0,c^2)$, orientato per x crescenti;

vii) $\displaystyle\int_{\partial A^+} (x + yz, y - xz, z - e^x \sin y)$, A definito da $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4r^2$, $x^2 + y^2 \geq r^2$;

viii) $\displaystyle\int_{\Sigma} (y+z, y-3y, x^2-z)$, Σ definita da $x^2+y^2+3z^4 = 1$, $z \geq 0$, orientata per z crescente;

ix) $\displaystyle\int_{\Sigma^+} (x, 1-y, |z|))$, Σ superficie laterale del doppio cono retto di base circolare su $z = 0$ di raggio unitario, e vertici $(3,-2,1)$, $3,-2,-1)$;

x) $\displaystyle\int_{\Sigma} (x + y + z)\, ds_2$, Σ definita da $x^2 = y^2 + z^2$, $0 \leq x \leq 2$;

xi) $\displaystyle\int_{\partial Q^+} (x + \sin(x + z), \cos(x + y + z), z^2 \cos(x + y + z))$, Q cubo $|x|,\ |y|,\ |z| \leq 1$;

xii) $\displaystyle\int_{\partial \Sigma^N} (y - x, y - z, z)$, Σ definita da $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, e orientata da $N(0,0,1) = (0,0,1)$;

xiii) $\displaystyle\int_{\Sigma^N} (x,y,z)$, $\Sigma = \mathrm{Im}(\sin\phi, \sin\phi, 1-\cos\psi)$, $0 \leq \phi,\ \psi \leq \dfrac{\pi}{2}$, $N\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}},0\right)$.

xiv) il flusso di $(x^2 - 2xy, y^2 - 2yz, z^2 - 2xz)$ attraverso la varietà regolare a pezzi $[0;2]\times[0;1]\times\{1\}\cup[0;2]\times\{0\}\times[0;1]\cup[0;2]\times\{1\}\times[0;1]\cup\{0\}\times[0;1]\times[0;1]\cup\{2\}\times[0;1]\times[0;1]$, orientata da $N(1,\frac{1}{2},1) = (0,0,1)$;

ESERCIZIO n.11 Se E è la semiellisse definita da $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, $z \geq 0$, ed N la normale esterna, si calcoli: $\displaystyle\int_{E^N} z(\frac{x}{a^2},\frac{y}{b^2},\frac{z}{c^2})$.

ESERCIZIO n.12 Sia B la palla unitaria di centro l'origine, e sia
$f(x,y,z) = ax^4 + by^4 + cz^4 + 3Ax^2y^2 + 3By^2z^2 + 3Cx^2z^2$.
Usando anche la formula di Eulero per funzioni positivamente omogenee si calcoli: $\displaystyle\int_{\partial B} f\, ds_2$.

ESERCIZIO n.13 Sia $\Omega \in \mathbf{R}^3$ una aperto, limitato connesso regolare (a pezzi), e $O = (a,b,c) \in \mathbf{R}^3$, $P = P(x,y,z) = (x,y,z)$. Calcolare sfruttando il teorema della divergenza

$a)$ se $O \notin \overline{\Omega}$ $\displaystyle\int_{\partial\Omega^+} \frac{P - O}{|P - O|_3^3}$, $\qquad b)$ se $B(O,r) \subseteq \Omega$ $\displaystyle\int_{\partial B(O,r)^+} \frac{P - O}{|P - O|_3}$,

$c)$ provare quindi che se $O \in \Omega$ ed A è un altro aperto con $O \in A$ allora
$$\int_{\partial A^+} \frac{P - O}{|P - O|_3^3} = \int_{\partial\Omega^+} \frac{P - O}{|P - O|_3^3},$$
$d)$ Mostrare, qualitativamente, che se V^o e W^ω sono sottovarietà compatte di dimensione 2 orientate da o ed ω, con bordo Γ in comune, e con orientazioni positive indotte opposte, e $O \notin V \cup W$, si ha: $\displaystyle\int_{V^o} \frac{P - O}{|P - O|_3^3} = \int_{W^\omega} \frac{P - O}{|P - O|_3^3}$.

$e)$ Si esprima analiticamente che una sottovarietà compatta senza bordo "circonda " O.

ESERCIZIO n.14 Provare che per domini $A \subseteq \mathbf{R}^2$ $[\mathbf{R}^3]$ abbastanza regolari, essendo $\nu(p) = (\nu_1, \nu_2[, \nu_3])$, $p \in \partial A$, la normale esterna, si ha:

$$a) \qquad \int_A f \frac{\partial g}{\partial x_i}\, dx_1 dx_2 [dx_3] \;=\; -\int_A g \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_1 dx_2 [dx_3] \;+\; \int_{\partial A} f g \nu_i ds \; [ds_2]$$

$$b) \qquad \int_A \nabla f \, dxdy[dz] \;=\; \int_{\partial A} f\nu \, ds[ds_2]$$

$$c) \qquad \int_A \operatorname{rot}\vec{F}\, dxdy[dz] \;=\; -\int_{\partial A} \vec{F} \times \nu \, ds[ds_2]$$

$$d) \qquad \int_A (f\Delta g - g\Delta f)\, dxdy[dz] \;=\; \int_{\partial A} \left(f\frac{\partial g}{\partial \nu} - g\frac{\partial f}{\partial \nu} \right) ds \; [ds_2].$$

Stokes

ESERCIZIO n.15 a- Posto $F(x,y,z) = (x^2 - 2xy, y^2 - 2yz, z^2 - 2xz)$, calcolare $\operatorname{div}F$
b- Trovare un campo $H(x,y,z) = (H_1(x,y,z), H_2(x,y,z), 0)$ per cui $\operatorname{rot}H = F$.

ESERCIZIO n.16 Sia $v = v(x,y,z) = v(p)$ un campo C^1 con divergenza nulla in Ω stellato rispetto all'origine cfr.FT25. Allora il campo:

$$w(x,y,z) = w(p) \;=\; \int_0^1 t \cdot v(tp) \times p\, dt \;=\; \int_0^1 t \cdot v(tp) \times \frac{d\, t \cdot p}{dt}\, dt,$$

è un potenziale vettore (indivergente) di v, $\left[\operatorname{rot}(V \times W) = V \operatorname{div} W - W \operatorname{div} V - \left(\frac{\partial W}{\partial V} - \frac{\partial V}{\partial W} \right) \right]$.

ESERCIZIO n. 17 Calcolare,

i) il flusso di $(x, y-z, xy-2z)$ attraverso $z = x^2 + y^2 \le 1$, di orientazione con componente orizzontale nel verso del gradiente di $x^2 + y^2$;

ii) il flusso di $\operatorname{rot}(x^2 - 2xy, y^2 - 2yz, z^2 - 2xz)$ attraverso la varietà regolare a pezzi $[0;2]\times[0;1]\times\{1\}\cup[0;2]\times\{0\}\times[0;1]\cup[0;2]\times\{1\}\times[0;1]\cup\{0\}\times[0;1]\times[0;1]\cup\{2\}\times[0;1]\times[0;1]$, orientata da $N(1,\frac{1}{2},1) = (0,0,1)$;

iii) il flusso di $\operatorname{rot}(1, x(2\pi - z), xz)$ attraverso la superficie parametrica $(r\cos\theta, r\sin\theta, \theta)$, $0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi$, orientata da $N(1,0,0)$ con terza componente positiva;

iv) il flusso di $\operatorname{rot}(3xy^2, -x^2yz, (y^3+x^3)z)$ attraverso la varietà definita $x^2+y^2 = 2z,\ 0 \le z \le 2$ e orientata in modo che $N(0,0,0) = (0,0,-1)$;

v) il flusso di $\operatorname{rot}(x^2, y^2, z^2)$ attraverso S definita da $z = \cos(x^2+y^2),\ x^2+y^2 \le \pi^2$, orientata da $N(0,0,1) = (0,0,1)$;

vi)il flusso di $\operatorname{rot}(yz, x^2y^2, x^2y^2)$ attraverso $x^2+y^2+z^2 = 1,\ 2z \le \sqrt{3}$, $N(0,0,-1) = (0,0,-1)$;

vii) il lavoro del campo $(x(x^2+y^2) + z\log(2+xz), -yz + y(x^2+y^2), x\log(2+xz))$ sul bordo, orientato positivamente, della porzione di sfera $x^2+y^2+z^2 = 1$ definita dalle condizioni $0 \le x,\ y,\ z\ x \le \sqrt{3}y,\ y \le \sqrt{3}x$, orientata da $(\widehat{x,y},z)$;

viii) il lavoro del campo $(x^2yz+2x, xy^2z-3y, xyz^2+4z)$ sul bordo, orientato positivamente, di S definita da $x^2(1+z^2)+y^2(1-z^2)=1-z^2$, $z\geq 0$, $x^2+y^2\leq 1$, orientata con versore normale avente terza componente positiva.

• ESERCIZIO n.18 Sia $S=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^3e^{-xy}=8,\ z\geq 0.$
a- Mostrare che S è una varietà regolare con bordo, e determinarlo.
b- Se si orienta S con N in modo che $N(0,0,2)=(0,0,1)$ si determini l'orientazione positiva di bS e si calcoli il flussso di $F=e^z(-xy^2,-x^2y,x^2+y^2)$ attraverso (S,N).
c- Se $\Gamma=S\cup\{(x,y,z): x^2+y^2=2\}$ si mostri che è sostegno di un cammino regolare. Si orienti Γ in modo positivo rispetto alla porzione di S che delimita e ha come proiezione su $z=0$ la base del cilindro. Si calcoli quindi il lavoro di $e^{-z}F$ su Γ così orientata.
