Analisi Matematica II, Anno Accademico 2017-2018.
Ingegneria Edile e Architettura

Vincenzo M. Tortorelli

FOGLIO DI TEORIA n. 1, cfr. Foglio Esercizi n.1

RCHIAMO DELLE NOZIONI ASTRATTE SULLE FUNZIONI

Ripasso riguardante la nozione astratta di funzione

Immagine, sostegno, traiettoria: se $f : D \to C$ è una funzione definita su D (*dominio*, $\mathrm{Dom}f$) a valori in C (*codominio*) e $H \subseteq D$, si dice *immagine* di H per f, il sottoinsieme di C i cui elementi sono i valori che f assume su H: $\{v \in C : \exists u \in H \ v = f(u)\}$.
Tale insieme si indica con $f(H)$, $\mathrm{Im}_H f$, e se $H = D$ spesso semplicemente con $\mathrm{Im}f$.
- **Surgettività:** se $H \subseteq D$, $A \subseteq C$, quando $A \subseteq \mathrm{Im}_H f$ la funzione si dice *surgettiva* su A da H, ovvero: l'equazione $f(u) = v$ ha, *per ogni* $v \in A$, *almeno* una soluzione $u \in H$.
- Se $A \subseteq C$ è dato come immagine di $f : D \to C$, si dice descritto in forma *parametrica*.

Esempi: - $f : \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbf{R}^2$, $f(t) = (\cos t, \sin t)$, $A = \mathrm{Im}f$ è il quarto di circonferenza (unitaria di centro $(0, 0)$), nel primo quadrante.
- $f : \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbf{R}^2$, $f(t) = (\cos 4t, \sin 4t)$, $A = \mathrm{Im}f$ è l'intera circonferenza.
- $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$, $f(t) = (3 \cos t + 1, 4 \sin t - 2)$, $A = \mathrm{Im}f$ è l'ellisse di centro $(-1, 2)$ e assi paralleli a quelli cartesiani lunghi 6 e 8.
-$f : [-\pi; \pi] \to \mathbf{R}^3$, $f(t) = (1, 2, 3) + (4 \sin t, 5 \sin t, 6 \sin t) = (1 + 4 \sin t, 2 + 5 \sin t, 3 + 6 \sin t)$, $A = \mathrm{Im}f$ è il segmento (percorso indietro, avanti, indietro a partire e finire con $(1, 2, 3)$ per $t = -\pi,\ \pi$) tra $(-3, -3, -3)$ (per $t = -\frac{\pi}{2}$) a $(5, 7, 9)$ (per $t = \frac{\pi}{2}$).
- $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, $f(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2})$, $A = \mathrm{Im}f$ è il cono circolare retto di vertice $(0, 0, 0)$ ottenuto ruotando il grafico di $z = g(x) = |x|$ attorno all'asse verticale.

- Per funzioni di più variabili reali $D \subseteq \mathbf{R}^M$ a valori in spazi cartesiani, $C = \mathbf{R}^m$, l'immagine, considerata per le sue proprietà geometriche, in vari ambiti viene chiamata *sostegno*.

- Una funzione f di una variabile reale ($D \subseteq \mathbf{R}$, $f(t) = (f_1(t), \dots f_m(t))$), con *funzioni componenti* continue, definite su di un intervallo D(segmento o semiretta), si dirà anche *curva parametrizzata* o *cammino*. Come *legge oraria*, il suo sostegno si dirà *traiettoria*.
Esempio: nell'ultimo esempio l'ellisse A è percorsa da f infinite volte in senso antiorario.

Caso di parametrizzazioni lineari:- Nel caso in cui $H = D = \mathbf{R}^M$, $C = \mathbf{R}^m$, $f(x_1, \dots x_M) = (f_1(x_1, \dots x_M), \dots, f_m(x_1, \dots x_M))$ è *lineare affine*,

$$f(x) = Ax + b,\ f_i(x_1, \dots x_M) = \sum_{j=1}^{M} a_{i,j} x_j \ + \ b_i,\ 1 \le i \le m,$$

l'immagine di f è un *sottospazio affine* di $\mathbf{R}^m$.
-Giacitura: Se $b_i = 0$ per ogni $1 \le i \le m$ tale immagine è un sottospazio vettoriale: la *giacitura* dei sottospazi affini del precedente tipo ad esso paralleli e si chiama anche *range*.
Una base è data dalle colonne linearmente *indipendenti* della matrice A di coefficienti a_{ij}, $1 \le j \le M$, $1 \le i \le m$. La dimensione si dice *rango* di f.
Segmenti parametrici: - Un *segmento* (orientato) di estremi $P = (p_1, \dots, p_m)$, $Q = (q_1, \dots, q_m) \in \mathbf{R}^m$ quindi *può* essere individuato (come esemplficato può essere individuato in modo meno diretto) in forma parametrica dall'immagine della funzione affine $f : [0; 1] \to \mathbf{R}^m$

$$f(t) = (Q - P)t + P = tQ + (1 - t)P = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_m(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tq_1 + (1 - t)p_1 \\ \vdots \\ tq_m + (1 - t)p_m \end{pmatrix} \ 0 \le t \le 1.$$

Si indica con $[\overrightarrow{P; Q}]$.
Convessi: un sottoinsieme C di uno spazio vettoriale si dice *convesso* se dati $P,\ Q \in C$ allora il segmento che li congiunge sta tutto in C: $tQ + (1 - t)P \in C$ per ogni $0 \le t \le 1$.

Parallelepipedi: - Nel caso in cui f è affine con codominio $\mathbf{R}^m$, $f(x) = P+Ax$, $P = (p_1,\ldots,p_m) \in \mathbf{R}^m$, A matrice $m\times M$, di colonne $(A^1 \ldots A^M)$ *linearmente indipendenti* (quindi $M \le m$) ma per *dominio* si considera *solo* l'ipercubo di $\mathbf{R}^M$ ovvero $D = [0;1]^M$, l'immagine determina il *parellelepipedo* M-dimensionale in $\mathbf{R}^m$ con spigoli paralleli alle colonne, di vertici $P, P+A^1,\ldots,P+A^M, P+A^1+A^2, P+A^1+A^3\ldots,P+A^1+A^M,\ldots$ $\ldots, P+A^1+A^2+\ldots+A^M$. Ovvero i punti di $\mathbf{R}^m$ del tipo:

$$P + x_1A^1 + \ldots + x_MA^M \ , \quad 0 \le x_1,\ldots,x_M \le 1.$$

- In particolare il *rettangolo cartesiano N-dimensionale* in $\mathbf{R}^N$ $(N = m = M)$, con spigoli paralleli agli assi, prodotto cartesiano $S_1\times\ldots\times S_N$ di N segmenti $S_j \subset \mathbf{R}$ (ciascuno con o senza qualche estremo), cioè con "facce" $N-1$ dimensionali parallele ai piani $N-1$ dimensionali coordinati è di tipo simile: dati $P{=}a{=}(a_1,\ldots,a_N) \in \mathbf{R}^N$, $b{=}(b_1,\ldots,b_N){\in}\ \mathbf{R}^N$:
$[a_1;b_1)\times(a_2;b_2)\times\ldots\times[a_N;b_N] = \{x\in\mathbf{R}^N : a_1 \le x_1 < b_1,\ a_2 < x_2 < b_2,\ldots,a_N \le x_N \le b_N\} =$

$$= a \ + \begin{pmatrix} b_1-a_1 & 0 & \ldots 0 \\ 0 & b_2-a_2 & \ldots 0 \\ & \vdots & \\ 0 & \ldots & b_N-a_N \end{pmatrix} [0;1)\times(0;1)\times\ldots\times[0;1] =$$

$= \{a + x_1(b_1-a_1)e_1 + \ldots + x_N(b_N-a_N)e_N \ , \ \ 0 \le x_1 < 1,\ 0 < x_2 < 1,\ldots,\ 0 \le x_N \le 1\}$.
Tetreadri: - Analogamente per $M \le m$ si ha la fomula paramterica di un *tetraedro* M dimensionale (per $M = 2$ un *triangolo*, e $M = 1$ un *segmento*) in $\mathbf{R}^m$ di vertici $0_{\mathbf{R}^m}$, $A^1,\ldots A^M$

$$x_1A^1 + \ldots + x_MA^M \ , \quad 0 \le x_1,\ldots x_M,\ x_1+\ldots+x_M \le 1.$$

Preimmagine, insieme di livello, sopralivello, sottolivello: se $f : D \to C$ è una funzione e $F \subseteq C$, si dice *preimmagine* di F per f il sottoinsieme di D di tutti gli elementi il cui valore tramite f è in F: $\{u \in D : f(u) \in F\}$. Tale insieme si indica con $f^{-1}(F)$.
- Se $B \subseteq D$ è dato come preimmagine si dice descritto in forma *cartesiana.*
Osservazione: per l'uso di questa notazione è bene aver un minimo di cautela: sia perchè non è detto che f sia invertibile, sia perchè si omette di specificare il dominio D preso in considerazione (f potrebbe essere espressa da formule che hanno significato anche fuori di D).

Esempi: - $f : [0;+\infty)\times[0;+\infty) \to \mathbf{R},\ f(x,y) = x^2+y^2,\ f^{-1}(\{1\}) = \{(x,y) \in [0;+\infty)\times[0;+\infty) : x^2+y^2 = 1\}$ quarto di circonferenza unitaria e centro $(0,0)$ nel primo quadrante.
-$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R},\ f(x,y) = x^2+y^2,\ f^{-1}(\{1\}) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$ è la circonferenza.
-$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R},\ f(x,y) = \dfrac{1}{9}(x-1)^2 + \dfrac{1}{16}(y+2)^2,\ f^{-1}(\{1\}) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{1}{9}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(y+2)^2 = 1\}$ è l'ellisse di centro $(-1,2)$ e assi paralleli a quelli cartesiani lunghi 6 e 8.
-$f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2,\ f(x,y,z) = (-30x+12y+10z, 15x+12y-20z),\ f^{-1}(\{(24,-21)\}) = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 :\ -30x+12y+10z = 24,\ 15x+12y-20z = -21\}$ è la retta passante per $(-3,-3,-3)$ e $(5,7,9)$, intersezione dei due piani definiti da $-30x+12y+10z = 24$, $15x+12y-20z = -21$.
- Il segmento di tale retta con i detti estremi deve esser specificato con ulteriori *diseguaglianze*, *e.g.*: $-90 \le 8x+10y+12z \le 218$.
-$f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R},\ f(x,y,z) = z^2-x^2-y^2,\ B = f^{-1}(\{0\}) = \{(x,y,z) : z^2 = x^2+y^2\}$ è il *doppio* cono circolare retto di vertice l'origine.
- Il cono semplice con $z \ge 0$ è $B = \phi^{-1}(\{0\})$ con $\phi(x,y,z) = z-\sqrt{x^2+y^2}$.

- Nel caso in cui $F = \{v\}$, $v \in C$, la preimmagine di un elemento si dice anche *fibra* su v di f in D. Se poi C è uno spazio vettoriale la fibra su 0_C si dice *luogo di zeri* di f in D.
- **Iniettività:** se per ogni $v \in C$, la fibra $f^{-1}(\{v\})$ è vuota o ha un solo elemento la funzione si dice *iniettiva* su D, cioè: $f(u) = v$ ha, *per ogni* $v \in C$, al *più* una soluzione $u \in D$.
- **Valori e sottoinsiemi di iniettività relativi:** - - data $f : D \to C$, si dice che $v \in C$ è *valore di iniettitvà per f su (relativamente a) D*, se la fibra su v ha un solo elemento;
- - si dice che $u \in D$ è *punto di iniettitvà per f su D*, se $f(u) \ne f(x)$ per ogni $x \ne u$, $x \in D$.
- - $E \subseteq D$ si dice insieme di iniettività per f su D se tutti i suoi punti lo sono.

- **Restrizioni, funzione vuota:** - - con *funzione vuota* si intende l'unica funzione con dominio vuoto.
- - dati $f : D \to C$, ed H insieme: si dice *restrizione di f ad H* la funzione con dominio $H \cap D$ ed ivi coincidente con f. Si indica con $f_{|_H}$.
- Se poi $C = \mathbf{R}^m$, più propriamente se $C = \overline{\mathbf{R}} = [-\infty; +\infty]$, la fibra su v ($\{u \in D : f(u) = v\}$) si chiama anche *insieme di livello* v di f in D. Impropriamente si può usare tale dizione per fibre di funzioni qualsiasi.
Esempio: concreti esempi di insiemi di livello sono le linee altimetriche nei diversi tipi di carte geografiche e topografiche: nel caso $D \subset \mathbf{R}^2$ è l'insieme delle coordinate geografiche di una certa zona, $f(x, y)$ la quota del punto di coordinate (x, y).
Sopra e sotto livelli: - Se $C = \overline{\mathbf{R}} = [-\infty; +\infty]$ le preimmagini $\{u \in D : f(u) \leq v\}$, delle semirette limitate superiormente con estremo $[-\infty; v]$, si dicono *sottolivelli* di f (in D). Le preimmagini $\{u \in D : f(u) < v\}$, delle semirette limitate superiormente senza estremo $[-\infty; v)$, si dicono *sottolivelli stretti* di f. Analogamente si parlerà di *sopralivelli* per le preimmagini di semirette limitate inferiormente.

- Se $C = \mathbf{R}^m$, $v = (v_1, \ldots v_m) \in \mathbf{R}^m$, la fibra su v di una funzione $f = (f_1, \ldots, f_m)$ su D è l'insieme delle soluzioni u in D del sistema, in generale *non lineare*: $\begin{cases} f_1(u) & = & v_1 \\ . \\ . \\ . \\ f_m(u) & = & v_m \end{cases}$

Caso di funzioni lineari: - Nel caso $D = \mathbf{R}^M$, $C = \mathbf{R}^m$, $f(x_1, \ldots x_M) = (f_1(x_1, \ldots x_M), \ldots, f_m(x_1, \ldots x_M))$ è *lineare* la fibra su $0_{\mathbf{R}^m} = (0, \ldots m\text{−volte} \ldots 0) \in \mathbf{R}^m$ di f si chiama anche *nucleo* o *Kernel* di f, ed è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^M$. Sono quindi luoghi di zeri di m *polinomi omogenei* di *primo grado* in M variabili. Tale nucleo coincide con la *gacitura* dei sottospazi affini dati dai livelli $f^{-1}(\{v\})$, $v \in \mathbf{R}^m$. Si ricorda in tali casi la formula di *dimensione*: $M = \dim \mathrm{Dom} f \ = \ \dim \mathrm{Im} f + \dim \mathrm{Ker} f$.
- I sopralivelli e i sottolivelli di una funzione lineare a valori reali sono quindi *semispazi affini.* Il sottopsazio affine del livello si dice di *supporto*, contenuto o meno nel semispazio.
- Un sistema di diseguaglianze per funzioni lineari individua quindi un'intersezione di semispazi affini, che possono o non possono contenere le porzioni dei relativi sottospazi di supporto, a secondo che le diseguaglianze siano strette o meno.
- Segmenti: Come esemplificato un segmento in $\mathbf{R}^m$ *può* essere specificato da:
i- il livello di una funzione lineare *surgettiva*a valori in $\mathbf{R}^{m-1}$ ovvero dalle soluzioni di una sistema lineare non omogeneo in m incognite ed $m - 1$ equazioni *indipendenti*, che individuano la retta di giacenza (formuala della dimensione);
ii- da due diseguaglianze per una funzione lineare in m variabili (polinomio di primo grado nelle m variabili) che individuano il segmento su tale retta.
- Parallelepipedi M dimensionali in $\mathbf{R}^m$: possono essere individuati da:
i- il livello il livello di una funzione lineare *surgettiva*a valori in $\mathbf{R}^{m-M}$ ovvero dalle soluzioni di una sistema lineare non omogeneo in m incognite ed $m - M$ equazioni *indipendenti*, che individuano il sottospazio affine M dimensionale di giacenza (formuala della dimensione);
ii-M *coppie* di diseguaglianze per lineari indipendenti che "inscatolano" la zona desiderata.
- Tetraedri M dimensionali in $\mathbf{R}^m$: analogamente i- si determina la giacitura e quindi ii- si usano $M - 1$ coppie di diseguaglianze e una diseguaglianza per funzioni lineari indipendenti.
-Convessi: *l'intersezioni di convessi è convessa* per cui qualsiasi intersezione anche infinita di sempispazi di $\mathbf{R}^m$ è convessa. Un teorema non immediato dà *in sostanza* il viceversa.
Quadriche: - Le *quadriche* in $\mathbf{R}^M$ sono definite come luoghi di zeri di un polinomio *di secondo grado* in M variabili: $\sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j + \sum_i b_i x_i + c = 0$ La matrice a_{ij} può sempre esser considerata simmetrica.

Grafici: se $f : D \to C$ è una funzione definita su D a valori in C si dice *grafico* di f su D il sottoinsieme di $D \times C$ (insieme delle coppie ordinate con prima componente in D e seconda in C) la cui seconda componente è il valore di f sulla prima componente:

$\{(u, v) \in D \times C : \; v = f(u)\}$, che si indica con $\mathrm{Graf}_D f$.

- Il grafico di $f : D \to C$ può esser sempre visto come immagine della funzione "grafico" $g : D \to D \times C$: $g(u) = (u, f(u))$. Si dice che il grafico è dato in *forma parametrica*.
- Se C è uno spazio vettoriale il grafico di $f : D \to C$ può essere visto come luogo di zeri di $F : D \times C \to C$: $F(u, v) = v - f(u)$. Si dice che il grafico è dato in *forma cartesiana*.

<u>Osservazione:</u> molto spesso è comodo identificare $\mathbf{R}^M \times \mathbf{R}^m$ con $\mathbf{R}^{M+m}$:
$((u_1, \dots u_M), (v_1 \dots v_m)) \sim (u_1, \dots u_M, v_1, \dots v_m)$. Pertanto se $D \subseteq \mathbf{R}^M$, $C = \mathbf{R}^m$ si identifica il grafico di f con un sottoinsieme di $\mathbf{R}^{M+m}$.
Se $D = \mathbf{R}^M$, $C = \mathbf{R}^m$, ed f è lineare, $\mathrm{Graf} f$ si identifica con un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^{M+m}$:

$$\mathrm{dimGraf}\, f = \mathrm{dimDom}\, f = M.$$

In molti casi poi è comodo usare altre identificazioni di $\mathbf{R}^M \times \mathbf{R}^m$ con $\mathbf{R}^{M+m}$. Per esempio $((u_1, \dots u_M), (v_1 \dots v_m)) \sim (v_1, \dots v_m, u_1, \dots u_M)$. Nel caso il grafico si vede come sottoinsieme di $C \times D$ piuttosto che di $D \times C$. Altre identificazioni si ottengo permutando le componenti.

<u>Osservazione:</u> il grafico della restrizione di $f : D \to C$ ad un insieme H, $\mathrm{Graf} f_{|H}$, non è altro che $\mathrm{Graf}_{H \cap D} f$, cioè l'intersezione del grafico di f su D con la colonna di sezione H: $\mathrm{Graf}_D f \cap H \times C$.

<u>Esempio:</u> per esempio se $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(y, z) = 4 - 2y - 3z$, il grafico si identifica con il piano $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x = f(y, z)\}$. Tale piano in $\mathbf{R}^3$ è definito da $x + 2y + 3z - 4 = 0$.
Cioè è dato in forma *cartesiana* come preimmagine di $0 \in \mathbf{R}$ della funzione reale affine $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $F(x, y, z) = x + 2y + 3z - 4$.
Esso è descritto in forma *parametrica* dall'immagine di
$g(s, t) = (s + 5t + 1, s - t, 1 - s - t) = s(1, 1, -1) + t(5, -1, -1) + (1, 0, 1)$, $(s, t) \in \mathbf{R}^2$
essendo $((1, 1, -1), (5, -1, -1))$ una base della *giacitura* del piano, cioè il sottospazio vettoriale definito dall'equazione omogenea $x + 2y + 3z = 0$, e $(1, 0, 1)$ un qualsiasi punto appartenente al piano di partenza. Quindi il grafico di f si identifica con l'immagine di
$g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ $g(s, t) = (s + 5t + 1, s - t, 1 - s - t)$.

Sopra e sotto grafici: - se $f : D \to \mathbf{R}$ è una funzione definita su D a valori reali si dice *sopra grafico*, [*sotto grafico*] di f su D il sottoinsieme di $D \times \mathbf{R}$:

$\{(u, v) \in D \times \mathbf{R} : \; v \geq f(u)\}$, e si indica con $\mathrm{Graf}^{\geq}{}_D f$.

[$\{(u, v) \in D \times \mathbf{R} : \; v \leq f(u)\}$, e si indica con $\mathrm{Graf}^{\leq}{}_D f$.]

- Si dirà *intragrafico* tra due funzioni f, g, a valori reali aventi egual dominio D, il sottoinsieme di $D \times \mathbf{R}$ compreso tra i due grafici:

$\{(u, v) \in D \times \mathbf{R} : \; g(u) \leq v \leq f(u)\} \cup \{(u, v) \in D \times \mathbf{R} : \; f(u) \leq v \leq g(u)\} =$

$= G^{\geq} g \cap G^{\leq} f \; \cup \; G^{\geq} f \cap G^{\leq} g$.

- Si diranno rispettivamente *sopragrafico negativo e sottografico positivo* gli insiemi

$\{(u, v) \in D \times \mathbf{R} : \; f(u) \leq v \leq 0\}$, $\{(u, v) \in D \times \mathbf{R} : \; 0 \leq v \leq f(u)\}$, indicati

rispettivamente con $\mathrm{Graf}^{\geq,-} f$ e $\mathrm{Graf}^{\leq,+} f$, specificando il dominio in caso di ambiguità.

- Si diranno *strette* le analoghe nozioni definite invece con le diseguaglianze strette.

[B] per V.Barutello et al. Analisi mat. vol. 2;

[F] per N.Fusco et al. An.Mat. due;

[FS] per N.Fusco et al. Elem. di An. Mat. due, versione semplificata.

Ripasso sulla nozione astratta di funzione, funzioni lineari. Distanza euclidea, norma e prodotto scalare: Cauchy-Schwarz. Limitati. Intorni, aperti e chiusi.

[FS] cap.2.8,9, 19 pagg.35-42, pagg.81-82.

[B] cap.III.3, 7 pagg. 108-111, pagg. 127-137; cap IV.2, 3 pagg. 170-184; cap. V.6, 7 pagg. 247-252.

[F] cap.2.14, 17, 19 Esem. 3 pagg. 78-79, pagg. 89-93, pagg. 96-97; cap.3.25 pagg.121-123.