Analisi Matematica II, Anno Accademico 2017-2018.
Ingegneria Edile e Architettura
Vincenzo M. Tortorelli
FOGLIO DI TEORIA n. 2, cfr. FE. n. 1 e 4
SPAZI CARTESIANI-EUCLIDEI, SPAZI ASTRATTI
LIMITATI, INTORNI, APERTI, CHIUSI, FRONTIERA.

Distanza euclidea

Prodotto scalare euclideo negli spazi cartesiani: Se $x,\ y \in \mathbf{R}^M$ si definisce il prodotto scalare euclideo: $$\langle x \cdot y\rangle_{E,M} =: x_1y_1 + \cdots + x_My_M.$$

Distanza e norma euclidea negli spazi cartesiani: In $\mathbf{R}$ la norma euclidea di $a \in \mathbf{R}$ non è altro che il suo valore assoluto $|a|$. La distanza euclidea tra $a \in \mathbf{R}$ e $b \in \mathbf{R}$ è data da $d_{E,1}(a,b) = |a-b|$, cioè dalla norma della differenza. La norma è la distanza da $0 \in \mathbf{R}$.

- Sulla base intuitiva del teorema di Pitagora in $\mathbf{R}^2$ si definisce come distanza euclidea tra $A = (a,\alpha) \in \mathbf{R}^2$ e $B = (b,\beta) \in \mathbf{R}^2$ la radice quadrata dalla somma dei quadrati delle differenze delle coordinate omologhe, che idealmente corrispondo ai quadrati delle lunghezze dei cateti del triangolo rettanglo avente come ipotenusa il segmento di estremi A e B:
$$d_{E,2}((a,\alpha),(b,\beta)) = \sqrt{|a-b|^2 + |\alpha-\beta|^2} = \sqrt{d_{E,1}(a,b)^2 + d_{E,1}(\alpha,\beta)^2} = \sqrt{\langle (A-B)\cdot(A-B)\rangle}.$$
La norma euclidea di $A = (a,\alpha) \in \mathbf{R}^2$ è la distanza di (a,α) dall'origine $(0,0) \in \mathbf{R}^2$: $|(a,\alpha)|_{E,2} = \sqrt{a^2+\alpha^2}$. La distanza tra A e B è la norma di $A-B$.

- Identificando $\mathbf{R}^2$ con il piano complesso $\mathbf{C}$: $(a,b) \sim a+ib = z$ si ha che il modulo di z è la norma del corrispondente vettore di $\mathbf{R}^2$. Pertanto la distanza al quadrato tra $z = a+ib$ e $w = \alpha + i\beta$ è $(z-w)(\overline{z}-\overline{w}) = (a-\alpha)^2 + (b-\beta)^2 = (Rez - Rew)^2 + (Imz - Imw)^2$.

- Iterando tale procedimento si definiscono la norma euclidea e la distanza euclidea in $\mathbf{R}^M$:
$$A = (a_1,\ldots a_M),\ B = (b_1,\ldots b_M) \in \mathbf{R}^M,\ \ |(a_1,\ldots a_M)|_{E,M} = \sqrt{a_1^2+\cdots+a_M^2} = \sqrt{\langle A\cdot A\rangle};$$
$$d_{E,M}((a_1,\ldots a_M),(b_1,\ldots b_M)) = \sqrt{d_{E,M-1}((a_1,\ldots a_{M-1}),(b_1,\ldots b_{M-1}))^2\ +\ d_{E,1}(a_M,b_M)^2} =$$
$$= \sqrt{(a_1-b_1)^2+\cdots+(a_M-b_M)^2} = \sqrt{\langle (A-B)\cdot(A-B)\rangle} = |A-B|_{E,M}.$$

<u>Proprietà assiomatiche dei prodotti scalari</u> $\langle x\cdot y\rangle$: s1) *non negatività:* $\langle x\cdot x\rangle \geq 0$,
s2) *bilinearità:* $\langle (x+\lambda u)\cdot(y+\mu v)\rangle = \langle x\cdot y\rangle + \lambda\langle u\cdot y\rangle + \mu\langle x\cdot v\rangle + \lambda\mu\langle u\cdot v\rangle$, per $\lambda,\ \mu \in \mathbf{R}$,
s3)*commutatività (simmetria):* $\langle x\cdot y\rangle = \langle y\cdot x\rangle$,
s4) *non degenere:* $\langle x\cdot x\rangle = 0 \iff x = \underline{0}$.

<u>Proprietà assiomatiche delle norme</u> $||v||$: n1) *non negatività norma:* $||v|| \geq 0$,
n2) 1-*omogeneità (Talete):* $||\lambda v|| = |\lambda|\,||v||$, $\lambda \in \mathbf{R}$,
n3) *diseguaglianza triangolare norma:* $||v+w|| \leq ||v|| + ||w||$,
n4) *non degenere:* $||v|| = 0 \iff v = \underline{0}$;

Relazioni tra norma e prodotto scalare e proprietà che le caratterizzano: sn1) $||v||^2 = \langle v\cdot v\rangle$,
sn2) $||v+w||^2 - ||v-w||^2 = 4\langle v\cdot w\rangle$,
sn3) *eguaglianza parallelogramma:* $||v+w||^2 + ||v-w||^2 = 2||v||^2 + 2||w||^2$;

sng1) *Interpretazione geometrica del prodotto scalare euclideo:* $\langle A\cdot B\rangle_{E,M} = |A|_{E,M}|B|_{E,M}\cos \widehat{A0_{\mathbf{R}^M}B}$.
<u>Proprietà assiomatiche delle distanze</u> d: d1) *non negatività distanza:* $d(A,B) \geq 0$,
d2) *diseguaglianza triangolare:* $d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$,
d3) *simmetria :* $d(A,B) = d(B,A)$,
d4) *non degenere:* $d(A,B) = 0 \iff A = B$;
Proprietà della distanza in relazione a quelle della norma:
nd1) 1-*omogeneità (Talete):* $d(\lambda A,\lambda B) = |\lambda| d(A,B)$, $\lambda \in \mathbf{R}$,
nd2) *invarianza per traslazione:* $d(A+C,B+C) = d(A,B)$.

Per provare le diseguaglianze triangolari un metodo generale è il seguente.

Diseguaglianza di Cauchy-Schwarz: 1) $|\langle A \cdot B\rangle| \leq ||A||\,||B||$,
2) avendosi l'eguaglianza per $s4$) se e solo se A e B sono linearmente dipendenti.

Prima giustificazione: per interpretazione geometrico-intuitiva del prodotto scalare euclideo.
Dimostrazione algebrica generale: 1) per ogni $t \in \mathbf{R}$ da s1), s2) (bilinearità) e s3)(simmetria):
$$0 \leq ||A+tB||^2 = \langle (A+tB)\cdot(A+tB)\rangle = t^2||B||^2 + 2t\langle A\cdot B\rangle + ||A||^2$$
pertanto il discriminante del trinomio in t è non positivo, cioè $4\langle A\cdot B\rangle^2 \leq 4||A||^2||B||^2$.
Se poi A e B sono dipendenti, $sA + tB = 0$, l'eguaglianza è immediata.
2) Viceversa se vale l'eguaglianza il discriminante è nullo ed il trinomio è $(t||B|| \pm ||A||)^2$. Se $||B|| = 0$ per $s4$) anche $B = \underline{0}$ e vi è dipendenza lineare. Altrimenti il trinomio si annulla per $t = T =: \mp\frac{||A||}{||B||}$. Ma il trinomio è anche $||A+tB||^2$ e si annulla per tale $t = T$, e quindi per s4) si ha $A + TB = \underline{0}$.
Nota: - quindi tale diseguaglianza e i suoi corollari valgono *per ogni prodotto* $\langle u \cdot v\rangle$ che soddisfa $s1),\ s2),\ s3)$, relativamente a $\|u\| = \sqrt{\langle u\cdot v\rangle}$.
- Per caraterizzare l'eguaglianza si usa anche $s4$).

Ne seguono dei corollari tra cui le diseguaglianze triangolari.

Massima pendenza: $$||w|| = \max_{v,||v||=1} \langle w\cdot v\rangle.$$
Prima giustificazione: per interpretazione geometrico-intuitiva del prodotto scalare euclideo.
Dimostrazione: per la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz $||w|| \geq \langle w\cdot v\rangle$ per ogni v per cui $||v|| = 1$. Se $w = \underline{0}$ l'asserto è vero. Se w è un vettore non nullo si pone $v = \dfrac{w}{||w||}$ ottenendo l'euguaglianza per bilinearità s2).

Diseguaglianza triangolare: n3) $||v+w|| \leq ||v|| + ||w||$; d2)$d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$.

Giustificazione geometrica: la minima lunghezza di un cammmino tra due punti è quella del segmento che li congiunge.
Dimostrazione algebrica generale: n3): da una parte per sn1) $||v+w||^2 = \langle (v+w)\cdot(v+w)\rangle =$ per bilinearità s2) e simmetria s3) $= ||v||^2 + ||w||^2 + 2\langle v\cdot w\rangle$,
d'altra parte $(||v|| + ||w||)^2 = ||v||^2 + ||w||^2 + 2||v||\,||w||$, e per Cauchy-Schwrz si conclude.
d2): segue da $n3$): $d(A,B) = ||A-B|| = ||(A-C)+(C-B)|| \leq ||A-C|| + ||C-B||$.

Diseguaglianze per componenti negli spazi cartesiani: se $x = (x_1, \dots x_M) \in \mathbf{R}^M$:
1) $$\max_{1\leq i\leq M} |x_i| \ \leq\ |x|_{E,M} \ \leq\ \sqrt{M} \max_{1\leq i\leq M} |x_i|.$$
2) $$\frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{i=1}^{M} |x_i| \ \leq |x|_{E,M} \ \leq\ \sum_{i=1}^{M} |x_i|.$$

Dimostrazione: 1) la prima è ovvia poichè la somma di quadrati è maggiore di uno degli addendi, la seconda anche: la somma di M addendi è minore di M volte il loro massimo.
2) la prima si ottiene applicando la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz ai vettori di $\mathbf{R}^M$ $(|x_1|, \dots, |x_M|)$ e $(1, \dots 1) \in \mathbf{R}^M$, la seconda si ottiene semplicemente elevando al quadrato i due termini non negativi e osservando che i doppi prodotti del secondo sono non negativi.

Spazi astratti.

Spazi Metrici e distanze.

Spazi pseudo-metrici e pseudo-distanze: sia F un *qualsiasi* insieme, $d : F \times F \to \mathbf{R}$ che verifichi $d1$), $d2$), $d3$) si dirà *pseudodistanza* su F, e (F, d) *spazio pseudo meterico.*
Spazi metrici: se inoltre d soddisfa $d4$), si dirà *distanza* su F, ed (F, d) *spazio metrico.*
Distanza punto insieme. Se d è una pseudo-distanza su F, $C \subseteq F$ si definisce la distanza di un punto $x \in F$ da C il numero $dist(x, C) = \inf_{y \in C} d(x, y)$.

Norme e seminorme.

Seminorme: *F spazio vettoriale*, $\nu : F \to \mathbf{R}$ che verifica $n1$), $n2$), $n3$) si dice *seminorma su F*. Usualmente le seminorme si indicano come i valori assoluti o con trattini verticali doppi.
Norme: se verifica anche $n4$) si dirà *norma sullo spazio vettoriale F*, ed *F spazio normato.*
Norme di operatori lineari: se $L : U \to V$ è lineare tra due spazi normati $\|L\| =: \sup_{v \neq \vec{0}_U} \frac{|Lv|_V}{|v|_U}$ definisce una norma sullo spazio vettoriale degli operatori lineari da U a V.
Proposizione. Per operatori lineari tra spazi normati $U \xrightarrow{L} V \xrightarrow{\Lambda} W$ si ha $\|\Lambda L\| \le \|\Lambda\| \, \|L\|$.
Infatti per definizione: $|\Lambda L u|_W \le \|\Lambda\| |Lu|_V \le \|\Lambda\| \|L\| |u|_U$.
Lemma. $L = \left(L_i^j \right)_{\substack{1 \le i \le k \\ 1 \le j \le h}}$: $\qquad \|L\| \; =: \; \sup_{v \neq \vec{0}} \frac{|Lv|_{\mathbf{R}^k}}{|v|_{\mathbf{R}^h}} \; \le \; |L|_{\mathbf{R}^{\mathbf{hk}}}$.

$$|Lv|_{\mathbf{R}^k} = \left| \sum_{j=1}^{h} v_j L^j \right|_{\mathbf{R^k}} \le \sum_{j=1}^{h} |v_j| \left| L^j \right|_{\mathbf{R^k}} \le \text{ (Cauchy-Schwarz) } |v|_{\mathbf{R^h}} |L|_{\mathbf{R^{hk}}}.$$

Distanze indotte da norme: - data una (semi)norma $\nu(u) = |u|$ su uno spazio vettoriale F la $d_\nu(u, v) = |u - v|$ definisce una (pseudo)- distanza su F.
- Tale (pseudo)-distanza verifica inoltre $nd1$) e d $nd2$).
- Viceversa data una dstanza d su uno *spazio vettoriale* F, che soddisfi $nd1$) e d $nd2$) la $\mu_d(u) = |u|_d = d(u, \vec{0}_F)$ è una norma.
- Si ha inoltre $|u|_{d_\nu} = \nu(u)$ e $d_{\mu_d}(u, v) = d(u, v)$.
Tali asserti sono di verifica immediata poichè da $n3$) segue $d2$) come già dimostrato.

Funzioni bilineari simmetriche e prodotti scalari.

Funzioni bilineari: se F e V sono spazi vettoriali una funzione $\beta : F \times F \to V$ si dice *bilineare* se verifica $s2$). Cioè è lineare in ogni "variabile " fissata l'altra:
$\beta(u + tw, v) = \beta(u, v) + t\beta(w, v)$ $\beta(u, v + tw) = \beta(u, v) + t\beta(u, w)$, $t \in \mathbf{R}$, u, v, $w \in F$.
- In altri termini è un prodotto distributivo rispetto alle operazioni di F a valori in V.
- È quindi suggestiva la notazione $\beta(u, v) = u \cdot_\beta v$.
Forme bilineari: una funzione bilineare a valori in $\mathbf{R}$ si dice anche forma bilineare.
Funzioni bilineari simmetriche: una funzione bilineare si dice simmetrica se verifica anche $s3$): cioè è un prodotto commutativo.
Forme bilineari semidefinite: una forma è semidefinita se per ogni x si ha $x \cdot x \ge 0$ o per ogni x si ha $x \cdot x \le 0$. Se vale $s1$) è quindi semidefinita positiva (in breve "non negativa").
Funzioni bilineari non degeneri: una bilineare è non degenere se $x \cdot x = 0_v$ se e solo se $x = 0_F$.
Forme bilineari definite: una forma bilinere non degenere e semidefinita non negativa [positiva] si dice definita positiva [negativa].
Prodotti scalari: una forma bilineare che verifica $s1$), $s2$), $s3$), $s4$), cioè reale, simmetrica e definita positiva si dice prodotto scalare.
- I prodotti scalari sovente verranno indicati con $\langle u \cdot v \rangle$.
Norme indotte da prodotti scalari: - se $x \cdot y$ è una forma bilinere simmetrica semidefinita positiva ($s1$), $s2$), $s3$)) allora $\sqrt{x \cdot x}$ è una seminorma.
- Inoltre tale seminorma soddisfa $sn2$), $sn3$)(eguaglianza del parallelogramma).
- Se poi vale $s4$) è una norma.

Dimostarzione: - per il prodotto in questione vale la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz per cui si usano sole le tre proprietà soprascritte (la $s4$) serve solo per caratterizzare l'eguaglianza). Pertanto la diseguaglianza triangolare $n3$) per $\sqrt{x \cdot x}$ segue come corollario già mostrato. Gli altri punti sono immediati basta usare le regole di distributività dei prodotti.
Teorema: Se una norma verifica l'eguaglianza del paralleogramma $sn3$) allora deriva dal prodotto scalare definito tramite $sn2$).
Dimostrazione omessa: essendo in sostanza una lunga ripetizione di "costruzioni di base".

Insiemi e funzioni limitate

Palle e sfere: In uno spazio (pseudo)-metrico (F, d) si dice *palla chiusa* [*aperta*] di centro c e raggio $r \in (0; +\infty]$ il sottolivello [stretto] di valore r della distanza da c:

$$\{x \in F : d(x, c) \leq r\},\ [\{x \in F : d(x, c) < r\}].\ \text{ si indica con } \overline{B}_d(c, r)\ [B_d(c, r)].$$

- Si dice *sfera* di centro $c \in F$, raggio $r \in (0; +\infty)$, l'insieme di livello r della funzione distanza da c: il sottoinsieme definito dall'eguaglianza $d(x, c) = r$. La si indica con $S_d(c, r)$.

Insiemi limitati: - un sottoinsieme H di F si dice *limitato* (rispetto alla (pseudo)-distanza d su F) se è contenuto in qualche palla di raggio finito.
- Per la diseguaglianza triangolare d2) basta che $\sup_{x \in H} d(x, x_0) < +\infty$ per un qualsiasi $x_0 \in F$.
- Se F è uno spazio vettoriale e d deriva da una seminorma, basta: $\sup_{x \in H} |x|_d < +\infty$: $x_0 = \vec{0}_F$.

Funzioni limitate: - Una funzione $f : D \to F$, si dice *limitata* (rispetto alla (pseudo)-distanza d su F) se la sua immagine è un sottoinsime limitato di F.
- Per la diseguaglianza triangolare d2) basta che $\sup_{u \in D} d(f(u), x_0) < +\infty$ per qualche $x_0 \in E$.
- Se F è uno spazio vettoriale e d deriva da una seminorma basta che: $\sup_{u \in D} |f(u)|_d < \infty$.

Famiglie di funzioni limitate uniformemente:- Una famiglia $\mathcal{F}$ di funzioni a valori in (F, d) si dice *limitata uniformemente* se:
le *immagini di tutte* le funzioni della famiglia sono contenute *nella stessa* palla di raggio finito.
- Altrimenti detto: l'unione delle immagini è un insieme limitato.
- Ovvero $\sup_{f \in \mathcal{F}} \sup_{u \in \mathrm{D}om f} d(f(u), x_0) < +\infty$.
- Cioè vi è un numero L per cui $d(f(u), x_0) \leq L$ indipendentemente da $f \in \mathcal{F}$ e da $u \in \mathrm{D}om f$.
Nota: identificando una successione $x = (x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ a valori in F con una funzione $x : \mathbf{N} \to F$ si parlerà quindi di successioni limitate, e di famiglie di successioni limitate uniformemente.

Nota: - nel seguito, *per comodità anche se non necessario*, molte proprietà delle pseudo-distanze potranno essere enunciate solo per le distanze pur valide nell'abito più generale.

Intorni, aperti, chiusi

Intorni: dati $x \in F$, (F, d) pseudo-metrico, si dice che $U \subseteq F$ è *intorno di x* (rispetto a d) se contiene una palla di centro x e raggio *non nullo*. Intersezione *finita* di intorni di x è ancora un intorno di x. Un soprinsieme di un intorno di x è un intorno di x.
Aperti: $E \subseteq F$ è *aperto* (rispetto a d in F) se e solo se è intorno di ogni suo punto.
Chiusi: $C \subseteq F$ si dice chiuso per la d in F se il suo complementare $F \setminus C$ è aperto.
Osservazione. - *Unione anche infinita* di insiemi aperti è aperta. L' *intersezione finita* di aperti è aperta.
- *Intersezione anche infinita* di insiemi chiusi è chiusa. L'*unione finita* di chiusi è chiusa.
- Il sottinsieme vuoto $\emptyset \subseteq F$ e lo stesso F sono sia aperti che chiusi in F per d.
Parte interna. - L'unione delle palle contenute in un sottoinsieme E si dice *parte interna* (rispetto a d) di E: si indica con E^o.
- È l'unione degli aperti contenuti in E, è quindi il *più grande* (rispetto all'inclusione) *aperto contenuto* in E. Un insieme è aperto se e solo se coincide con il suo interno.

Chiusura. - L'intersezione degli insiemi chiusi che contengono E si dice *chiusura* di E: si indica con $\overline{E}$.
- È il *più piccolo* (rispetto all'inclusione tra insiemi) *chiuso che contiene* E. Un insieme è chiuso se e solo se coincide con la sua chiusura.

Osservazione: il complementare della chiusura di un insieme E è la parte interna del complementare e la chiusura del complementare il complementare dell'interno:

$$(F \setminus E)^o = F \setminus \overline{E}, \quad \overline{(F \setminus E)} = F \setminus (E^o).$$

Osservazione: - per la diseguaglianze triangolare $B(c, r)$ è aperto: se $p = d(y, c) < r$ allora $B(y, r - p) \subseteq B(c, r)$: $d(z, c) \leq d(z, y) + d(y, c) < r$.
- similmente $\overline{B}(c, r)$ è chiuso: per la diseguaglianza triangolare il suo complementare $\{y : \ d(y, c) > r\}$ è aperto.

Osservazione: - si ha $\overline{\{x\}} = \{y : \ d(y, x) = 0\}$. Infatti, come sopra, per la diseguaglianzea triangolare, il complementare di quest'ultimo insieme $\{y : \ d(y, x) > 0\}$ è aperto: quindi tale insieme è chiuso. In secondo luogo se $x \in C = \overline{C}$ e $d(y, x) = 0$ essendo $F \setminus C$ aperto se $y \notin C$ vi sarebbe $r > 0$ per cui $B(y, r) \cap C = \emptyset$, ma d'altra parte $x \in B(y, r) \cap C$.
• Quindi se d è una *distanza* si ha $\overline{\{x\}} = \{x\}$. Quindi:

i sottoinsieme i *finiti sono chiusi per una distanza.*

Osservazione: -Pur essendo d una distanza, non è sempre vero che $\overline{B}(c, r)$ sia uguale a $\overline{B(c, r)}$. In generale $\overline{B}(c, r) \supset \overline{B(c, r)}$.
E. g. per la distanza discreta, $d(x, x) = 0$, $d(x, y) = 1 \ x \neq y$, su un insieme F *con più di un elemento*: $B(c, 1) = \{c\}$ è sia aperto che chiuso (cfr. supra) e coincide con la sua chiusura, ma $\overline{B}(c, 1) = F$.

- Per pseudo-distanze *associate a seminorme* vale invece $\overline{B}(c, r) = \overline{B(c, r)}$.

Ciò è più agevole da dimostrare con la nozione di convergenza di successioni.

Frontiera. L'intersezione $\overline{E} \cap \overline{(F \setminus E)}$ della chiusura di E con la chiusura del complementare di E si dice *frontiera* di E e si indica con ∂E.

Osservazione: $$\overline{E} = E^o \cup \partial E.$$

Punti aderenti, di accumulazione ed isolati

Aderente. Un punto $x \in F$ si dice *aderente ad* $E \subseteq F$ (rispetto a d) se ogni suo intorno ha intersesione non vuota con E.
Accumulazione. Un punto $x \in F$ si dice *di accumulazione per* $E \subseteq F$ se ogni suo intorno ha intersesione non vuota con $E \setminus \{x\}$.
Isolato. Un punto $x \in F$ si dice *isolato in* $E \subseteq F$ se $x \in E$ e ha un intorno la cui intersezione con $E \setminus \{x\}$ è vuota.
Osservazione: - ogni punto di accumulazione per E è un punto aderente ad E;
- un punto aderente ad E o è isolato in E o è di accumulazione per E.
Osservazione: - $\overline{E}$ è quindi l'insieme dei punti aderenti ad E.
- $\overline{E}$ è l'unione tra l'insieme dei punti isolati in E e l'insieme dei punti di accumulazione per E.

Aperti o chiusi relativi e distanza indotta.

- Dati $p \in D \subseteq G$, d (pseudo-)distanza su G, si dice che $A \subseteq D$ è *intorno di p relativamente a D* se vi è $U \subseteq G$ intorno di p per cui $A = U \cap D$. Analogamente si definiscono gli aperti, i chiusi, e le frontiere di sottoinsiemi di D relativi a D.
- La *distanza indotta* su D non è altro che la *restrizione a* $D \times D$ della distanza di G: quindi A è un intorno relativo a D di un punto $p \in D$ se e solo se contiene l'intersezione di D con una palla di centro p (palla relativa): $A \supseteq D \cap B(p, r)$ per qualche $r > 0$.

[B] per V.Barutello et al. Analisi mat. vol. 2;

[F] per N.Fusco et al. An.Mat. due;

[FS] per N.Fusco et al. Elem. di An. Mat. due, versione semplificata.

SPAZI ASTRATTI: METRICI, VETTORIALI NORMATI, CON PRODOTTO SCALARE:

[B] cap. IV.3 pagg.178-180; cap.IV.3 Esem.(IV.88) pagg. 210-211 (funzioni trigonometriche e prodotto scalare L2); cap. VII par. da 1 a 5 pagg. 331-348, in particolare distanze L1 ed uniforme nel piano pag.332, per funzioni continue pag. 333-334 e distanza L2.

[F] cap. 1.8 formule da (8.10) a(8.12) pagg.53-53; cap.2 pagg 75-120 in particolare: formula (15.6) pag. 83, distanza uniforme per funzioni continue Esem. 4 pag. 79, distanze Lp negli spazi cartesiani pagg.96-97.

[FS] cap.2.8,9, 19 pagg.35-42, pagg.81-82.

[B] cap.III.3, 7 pagg. 108-111, pagg. 127-137; cap IV.2, 3 pagg. 170-184; cap. V.6, 7 pagg. 247-252.

[F] cap.2.14, 17, 19 Esem. 3 pagg. 78-79, pagg. 89-93, pagg. 96-97; cap.3.25 pagg.121-123.