Analisi Matematica II, Anno Accademico 2017-2018.
Ingegneria Edile e Architettura
Vincenzo M. Tortorelli
FOGLIO DI TEORIA n. 3, cfr. FE 4
ESEMPI DI SPAZI METRICI, NORMATI E PRODOTTI SCALARI

ESEMPI PRINCIPALI DI SPAZI METRICI ASTRATTI

1-*DISTANZE EUCLIDEE:* come provato le distanze euclidee negli spazi cartesiani, che sono spazi vettoriali, sono distanze che derivano dalle norme euclidee associate al prodotto scalare cartesiano.

1.1-*REALI E NATURALI ESTESI:* - posto $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$, $\overline{\mathbf{N}} = \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ la funzione

$$d_{\pm\infty}(x,y) = \begin{cases} |\arctan x - \arctan y|, & x,\ y \in \mathbf{R} \\ \dfrac{\pi}{2} - \arctan x, & y = +\infty,\ x \in \mathbf{R} \\ \dfrac{\pi}{2} + \arctan x, & y = -\infty,\ x \in \mathbf{R} \\ 0, & x = y \notin \mathbf{R} \\ \pi, & x = \pm\infty,\ y = \mp\infty \end{cases},\quad \text{è una distanza su } \overline{\mathbf{R}},\text{ e } \overline{\mathbf{N}}.$$

2-*SEMINORMA INTEGRALE L^1:* l'insieme delle funzioni reali f di variabile reale su I intervallo, *assolutamente integrabili in senso generalizzato à la Riemann*, cioè integrabili in senso generalizzato su I (integrabili à la Riemann sui segmenti ove sono limitate e con limite degli integrali all'infinito e nelle singolarità) e con $\int_I |f(t)|\,dt < +\infty$, si indica qui con $\mathcal{RL}^1$.

2.1- grazie alla diseguaglianza triangolare per gli integrali, e a quella per il valore assoluto si ha che $\mathcal{RL}^1$ con la somma di funzioni $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ e il prodotto di una funzione per un numero $(rf)(x) = rf(x)$ è uno spazio vettoriale,

2.2- inoltre $|f|_{L^1(I)} =: \int_I |f(x)|\,dx,\ f \in F$, è ben definita ed è una seminorma (*e.g.* una funzione non nulla in un numero finito di punti di I ha integrale nullo): la seminorma integrale $L^1(I)$, con pseudo-distanza associta d_{L^1}.

- *Intuitivamente* la pseudo-distanza tra due funzioni misura *l'area tra i loro grafici.*

<u>Nota 1:</u> - Tale pseudo distanza ristretta alle funzioni *continue è una distanza*: infatti se due funzioni continue a valori reali differiscono in un punto di un intervallo $|f(t_0) - g(t_0)| > 2\delta > 0$, allora (per permanenza del segno nella differenza) differiscono in un sottointervallo J che contiene t_0, $|f(t) - g(t)| > \delta > 0\ \forall t \in J$: qui in J l'integrale del modulo della differenza sarà *(lunghezza di J)* $\cdot\,\delta$ e quindi strettamente positivo.

3-*analogo negli spazi cartesiani ℓ^1:* Il corrispondente di $\mathcal{RL}^1$ in $\mathbf{R}^m$ *non* è la distanza euclidea, ma è la distanza $d_{\ell^1(m)}(((a_1,\ldots,a_m),(b_1,\ldots,b_m)) = |a-b|_{\ell^1(m)} =: \sum_{i=1}^m |a_i - b_i|$: al posto delll'integrale vi è una somma e le m-ple vengono viste come funzioni definite su $\{1,\ldots,m\}$.
<u>Nota 2:</u> le *palle* in $(\mathbf{R}^2, \ell^1)$ sono *quadrati* con *diagonali parallele agli assi cartesiani*, centro il centro del quadrato e raggio la metà della diagonale.

L'analogia si estende:

4-*spazio ℓ^1 delle successioni totalmente sommabili:* analogamente se F è l'insieme delle successioni a valori in uno spazio normato $(G, ||u||)$ con *serie delle norme* sommabile allora F è uno *spazio vettoriale* (con somma e prodotto per componenti $(x+ry)_n = x_n + ry_n$) e

$d_{\ell^1(\mathbf{N})}(x,y) = |x-y|_{\ell^1(\mathbf{N})} =: \sum_{n=0}^{\infty} ||x_n - y_n||$ è una distanza che deriva da una norma.

- Nel caso di successioni a valori reali, in cui $(G, ||u||) = (\mathbf{R}, |u|)$, lo spazio vettoriale F è quallo delle successioni con serie dei valori assoluti finita: cioè con *serie assolutamente convergente.*
Nota 3: - gli elementi di $\mathbf{R}^m$ $(a_1, \ldots, a_m)$ possono essere identificati a successioni "corte" nulle dopo l' m-simo termine: $x_0 = a_1, x_1 = a_2, \ldots, x_{m-1} = a_m, x_m = 0, x_{m+1} = 0 \ldots.$
- A loro volte le successioni $x_0, x_2, \ldots$, che sono funzioni definite su $\mathbf{N}$, possono essere identificate con funzioni definite su $\mathbf{R}$ costanti a tratti sugli intervalli (di lunghezza 1) tra due numeri interi: $f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ x_n & n \leq t < n+1 \end{cases}$
- Le distanze tra le successioni e le funzioni corrispondenti evidentemente coincidono:
infatti *l'integrale generalizzato, su* $\mathbf{R}$, di una funzione non negativa, costante su segmenti, *è la serie delle aree dei rettangoli* con cui è costituita la zona del piano tra il grafico e l'asse orizzontale (*sottografico positivo*). Cioè la serie dei prodotti dell'ampiezza di ogni segmento per il valore costante della funzione su di esso (la serie delle *basi per le altezze*).
Nota 4: - le distanze e le norme L^1 non derivano in generale da un prodotto non verificando $sn3$): già in $\mathbf{R}^2$ la coppia $u = (1,0)$, $v = (0,1)$ non verifica per la norma ℓ^1 l'eguaglianza del parallelogramma: $|u-v|^2_{\ell^1} + |u+v|^2_{\ell^1} = 4 + 4 \neq 4 = 2|u|^2_{\ell^1} + 2|v|^2_{\ell^1}$.

5-*DISTANZA UNIFORME:*(cfr. FT 8, 9) se $F = \mathcal{B}(A, \bar{d})$ è l'insieme delle funzioni a valori in uno spazio metrico $(G, \bar{d})$ e *limitate*, definite su un qualsiasi insieme A, allora $d_{Unif(A)} = \sup\limits_{x\in A} \bar{d}\,(f(x), g(x))$ è una distanza su F che si dice *distanza uniforme* relativa a $\bar{d}$.
-*norma uniforme:* se F è l'insieme delle funzioni a valori in uno spazio vettoriale normato $(G, ||u||)$ e *limitate*, definite su un qualsiasi insieme A, allora F è uno spazio vettoriale e $|f|_{Unif(A)} = \sup\limits_{x\in A} ||f(x)||$ è una norma su F che si dice *norma uniforme* relativa a $||u||$, e la distanza indotta è quella relativa alla distanza indotta da $||u||$.

- Graficamente per funzioni reali di variabile reale ($A \subseteq \mathbf{R}$ intervallo, $(G, ||u||) = (\mathbf{R}, |u|)$) due funzioni distano meno di r se il grafico di una sta nel "tubo verticale di raggio r" attorno al grafico dell'altra, e viceversa.

Nota 5: $\mathcal{F}$ è una famiglia di funzioni $f : A \to (G, \bar{d})$ *limitata uniformemente* se e solo $\mathcal{F}$ è un sottoinsieme delle funzioni limitate per $\bar{d}$, ed è *limitato per la distanza uniforme.*

Nota 6: Le distanze integrali tra funzioni possono esser piccole con distanza uniforme grande:
$f(x) = n$, $\frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n}$, $g(x) \equiv 0$: $|f-g|_{Unif} = n$, $|f-g|_{L^1} = \displaystyle\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} n\,dx = \frac{1}{n+1}$.

Nota 7: se I è un intervallo limitato, $f_n \in \mathcal{RL}^1(I)$, $|f_n - f|_{Unif(I)} \xrightarrow{n\to\infty}$ allora
$$f \in \mathcal{RL}^1(I),\ |f_n - f|_{L^1(I)} \xrightarrow{n\to\infty} 0, \qquad \int_I f_n(x)dx \to \int_I f(x)dx.$$
Dimostrazione: - la deduzione di $f \in \mathcal{RL}^1(I)$ per quanto elmentare è articolata essendolo la definzione di integrabilità secondo Riemann, e quella di $\mathcal{RL}^1(I)$ (cfr. FT 8 completezza delle funzioni limitate per la convergenza uniforme).
- Per il resto, posto $I = (a;b)$: $|f_n - f|_{L^1(I)} = \displaystyle\int_I |f_n(x) - f(x)|dx \leq \int_I \sup_{y\in I} |f_n(y) - f(y)|dx =$
$\displaystyle\sup_{y\in I} |f_n(y) - f(y)| \int_I dx = \sup_{y\in D} |f_n(y) - f(y)|(b-a) \to 0.$
Inoltre per la linearità degli integrali e la diseguaglianza triangolare per gli integrali
$\displaystyle\left|\int_I f_n(x)dx - \int_I f(x)dx\right| \leq \int_I |f_n(x) - f(x)|dx \to 0.$

6- *analogo per* $\mathbf{R}^m$ *e per successioni limitate: la distanza* ℓ^∞*:* si definisce per $F = \mathbf{R}^m$ o F l'insieme delle successioni *limitate*, la distanza uniforme $d_{Unif}(x,y) = \sup\limits_{n\in\mathbf{N}} \bar{d}(x_n, y_n)$.

Nota 8: le *palle* in $(\mathbf{R}^2, \ell^\infty)$ sono *quadrati* con *lati paralleli agli assi cartesiani*, centro il centro del quadrato e raggio la metà del lato.
Nota 9: anche le distanze uniformi non derivano in generale da un prodotto, non verificando le distanze dalla funzione nulla $sn3$):
$u = (1,0)$, $v = (0,1)$: $|u-v|^2_{\ell^\infty} + |u+v|^2_{\ell^\infty} = 1 + 1 \neq 4 = 2|u|^2_{\ell^1} + 2|v|^2_{\ell^1}$.

L'analogo della distanza euclidea, che permette di usare il concetto di ortogonalità in ambiti generali e le intuzioni basate sui teoremi di Pitagora ed Euclide oltre a quello di Talete, è:

7-DISTANZE E PSEUDODISTANZE QUADRATICHE DA PRODOTTI, L^2, ℓ^2*:* - per apprezzare l'utilità della nozione astratta si osservi che un prodotto $x \cdot_P y$ bilineare, simmetrico e definito positivo su uno spazio vettoriale *dà* su tale spazio *una nozione di ortogonalità* $x \cdot_P y = 0$. Permette di usare l'intuizione della geometria euclidea piana, basata *oltre che sulla proporzionalità anche sulla perpendicolarità*, in diversi ambiti:
Esempio, serie di Fourier: - si consideri lo spazio vettoriale $C([-\pi;\pi])$ delle funzioni continue periodiche sull'intervallo chiuso $[-\pi;\pi]$.
- Il prodotto $\langle f \cdot g\rangle_{L^2} =: \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$ è un prodotto scalare su $C([-\pi;\pi])$.
- Per $n \in \mathbf{N}$ le funzioni $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx$ per $n > 0$, sono *ortonormali* rispetto a tale prodotto scalare: $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} 1\,dx = 2\pi$, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(\cos nx)^2\,dx = \frac{1}{n}\int_{-n\pi}^{n\pi}(\cos y)^2\,dy = \int_{-\pi}^{\pi}(\cos y)^2\,dy =$
$= 4\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos y)^2\,dy = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin y)^2\,dy \cdots = \int_{-\pi}^{\pi}(\sin nx)^2\,dx$, e $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}[(\cos nx)^2 + (\sin nx)^2]\,dx = 2\pi$,
quindi $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(\cos nx)^2\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}(\sin nx)^2\,dx = \pi$. Per l'ortogonalità:
$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx \ = 0;$
$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,dx = \frac{1}{m}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx(\sin mx)'\,dx = \frac{1}{m}[\cos nx\sin nx]_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{m}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin mx\,dx =$
$= \displaystyle\frac{n}{m}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin mx\,dx = -\frac{n}{m^2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx(\cos mx)'\,dx = \frac{n^2}{m^2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,dx$
quindi $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,dx = 0$ se $n \neq m$; analogamente
$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\sin mx\,dx = -\frac{1}{m}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx(\cos mx)'\,dx = -\frac{1}{m}[\cos nx\cos mx]_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{m}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\,dx =$
$= \displaystyle\frac{n}{m}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\,dx = \frac{n}{m^2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx(\sin mx)'\,dx = -\frac{n^2}{m^2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\sin mx\,dx.$
- In questo ambito quindi data una funzione f, i numeri
$A_0 = \displaystyle\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \langle f \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\rangle_{L^2}$, $A_n = \displaystyle\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \langle f \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx\rangle_{L^2}$,
$B_N\displaystyle\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \langle f \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\rangle_{L^2}$, $n > 0$ fanno le veci delle *coordinate cartesiane.*
- Come per la base canonica $e_1 = (1,0\ldots,0),\ldots,e_N = 0,\ldots,0,1)$ di $\mathbf{R}^N$ si ha $x = (x_1,\ldots,x_N) = x_1e_1 + \cdots + x_Ne_N$ e $x_i = \langle x \cdot e_i\rangle_N$, ci si domanda in che senso le funzioni trigonometriche scelte siano una base cioè

$$S_N(x) =: A_0 + \sum_{n=1}^{N}\left(A_n\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} + B_n\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\right) \xrightarrow[N\to\infty]{} f(x)$$

fissato x *non* è detto che la serie *numerica* sia convergente o sia convergente proprio ad $f(x)$.
- Invece si può provare la convergenza rispetto alla *distanza tra funzioni* indotta dal prodotto scalare L^2: $dist^2_{L^2}(f, S_N) = \langle (f - S_N)\cdot(f - S_N)\rangle_{L^2} = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|f(x) - S_N(x)|^2\,dx \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$

7.1 pseudo distanza L^2: sia $F = \mathcal{RL}^2$ l'insieme delle funzioni reali definite su I intervallo, integrabili alla Riemann sui sottointervalli limitati ove sono limitate, con $\displaystyle\int_I |f(t)|^2 dt < +\infty$:

7.1.1- F con la somma di funzioni $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ e il prodotto di una funzione per un numero $(rf)(x) = rf(x)$ è uno spazio vettoriale,

7.1.2- $\langle f\cdot g\rangle_{L^2(I)} =: \displaystyle\int_I f(t)\cdot g(x)\,dt$, $f,\ g \in F$, è ben definita ed è ua forma bilineare simmetrica non negativa (*e.g.* funzioni non nulle solo in un numero finito di punti di I): il prodotto L^2 di funzioni. La seminorma e la pseudo-distanza associate si diranno quadratiche L^2.

Dimostrazione : 7.1.1) se $f(t)$ e $g(t)$ sono integrabili secondo Riemann (sui sottointervali ...) e $r \in \mathbf{R}$ allora anche $f+rg$ lo è. Inoltre $|f(t)+rg(t)|^2 = |f(t)|^2 + r^2|g(t)|^2 + 2r|f(t)||g(t)| \leq 2|f(t)|^2 + 2r^2|g(t)|^2$ per cui, essendo l'ultima somma con integrale finito per ipotesi, si ha anche che $|f+rg|^2$ ha integrale finito.

7.1.2) se $f,\ g$ sono integrabili alla Riemann (sui sottointervalli ...) allora anche $f\cdot g$ lo è. Inoltre $|f\cdot g| \leq |f|^2 + |g|^2$ e quindi ha integrale finito su I se e $|f|^2,\ |g|^2$ lo hanno anch'esse: quindi per $f,\ g \in F$ $\langle f\cdot g\rangle_{L^2(I)} \in \mathbf{R}$ è ben definito.

Poichè l'integrale è lineare sulle funzioni integrabili ($\displaystyle\int (\phi(t)+r\psi(t))\,dt = \int \phi(t)dt + r\int \psi(t)dt$) ne segue direttamente che $\langle f\cdot g\rangle_{L^2(I)}$ è una forma bilineare. È simmetrica essendo il prodotto di numeri commutativo, e non negativa per positività dell'integrale ($\phi \geq 0 \Longrightarrow \displaystyle\int \phi(t)\,dt \geq 0$).

- Tale prodotto ristretto alle funzioni *continue è un prodotto scalare.*
- La distanza L^2 non ha un'immediata interpretazione pittorica.

Come detto, ha un forte contenuto geometrico se pur non pittorico, permettendo di estendere il concetto di otogonalità. Ha poi importanza in statistica e probabilità: rappresentando integrali di questo tipo lo *scarto quadratico medio.*

8- *distanza euclidea ℓ^2:* infatti il corrispodente di $\mathcal{RL}^2$ in $\mathbf{R}^m$ è proprio la distanza euclidea
$d_E((a_1,\ldots,a_m),(b_1,\ldots,b_m)) = d_{\ell^2(m)}((a_1,\ldots,a_m),(b_1,\ldots,b_m)) = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^m |a_i-b_i|^2}$: anche qui al posto dell'integrale v' è una somma, le m-ple vengono viste come funzioni su $\{1,\ldots,m\}$.

9-*prodotto ℓ^2 per successioni:* analogamente se F è l'insieme delle successioni x a valori in uno spazio con prodotto scalare $(G, \langle u\cdot v\rangle)$, norma indotta $||u||$, e con *serie dei quadrati delle norme* finita ($\displaystyle\sum_{n=0}^\infty ||x_n||^2 < +\infty$) allora esso è uno spazio vettoriale, e $d_{l^2(\mathbf{N})}(x,y) = \sqrt{\displaystyle\sum_{n=0}^\infty ||x_n-y_n||^2}$ è una distanza e deriva dal prodotto di tali successioni $\langle x\cdot y\rangle_{\ell^2(\mathbf{N})} = \displaystyle\sum_{n=0}^\infty \langle x_n\cdot y_n\rangle$.

<u>Nota 10:</u> - (cfr. Nota 6) su un intervallo I, anche se limitato, può essere che due funzioni distino poco rispetto alla distanza integrale L^1 molto rispetto alla quadratica:

$f(x) = n^{\frac{3}{2}},\ \frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n},\ g(x) \equiv 0$: $d_{L^1}(f,g) = \dfrac{n^{\frac{3}{2}}}{n(n+1)} \to 0$, $d_{L2}(f,g) = \sqrt{\dfrac{n^3}{n(n+1)}} \to +\infty$.

- In altri termini vi sono f per cui: $\int_0^1 |f|dx < +\infty$ ma $\int_0^1 |f|^2 dx = +\infty$: $f(x) = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$.

<u>Nota 11 :</u> - Su un intervallo I di *lunghezza finita L* si ha però, per la diseguaglianza di Cauchy-Scharz in ambito astratto, sempre

$$\int_I |f(x)|\,dx = \langle |f|\cdot 1\rangle_{L^2(I)} \leq |1|_{L^2(I)}|f|_{L^2(I)} = \sqrt{L}\sqrt{\int_I |f(x)|^2\,dx}.$$

- Quindi se I è un intervallo limitato, se $f_n,\ f \in \mathcal{RL}^2(I)$, $|f_n - f|_{L^2(I)} \xrightarrow{n\to\infty}$ allora anche $f_n,\ f \in \mathcal{RL}^1(I)$, $|f_n - f|_{L^1(I)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, $\quad \displaystyle\int_I (f_n(x))^2 dx \to \int_I f(x)dx$.

- Usando, per f_n^2, f^2, $|f_n - f|^2$, quanto provato nella nota 7 e quanto sopra, si ottiene che se I è un intervallo limitato, $f_n \in \mathcal{RL}^2(I)$, $|f_n - f|_{Unif(I)} \xrightarrow{n\to\infty}$ allora

$$f \in \mathcal{RL}^2(I),\ |f_n - f|_{L(I)} \xrightarrow{n\to\infty} 0, \qquad \int_I f_n(x)dx \to \int_I f(x)dx.$$

<u>Nota 12:</u> Su intervalli di *lunghezza infinita* le due distanze sono *scorrelate*, vi sono f per cui:

$$\int_1^{+\infty} |f|dx = +\infty \text{ ma } \textstyle\int_1^{+\infty} |f|^2 dx < +\infty\text{: } f(x) = \frac{1}{x}.$$

<u>Nota 13:</u>- invece per le successioni, essendo quelle con serie totalmente convergente infinitesime, e quindi con successione delle norme definitivamente minori di 1, si ha che se $d_{\ell^1(\mathbf{N})}(x,y) < +\infty$ anche $d_{\ell^2(\mathbf{N})}(x,y) < +\infty$. In altri termini $\ell^1(\mathbf{N}) \subset \ell^2(\mathbf{N})$.

<u>Nota 14:</u> - come per la distanza uniforme e per le di stanze ℓ^1, ℓ^2 sulle successioni, si potranno definire, una volta introdotti le opportune nozioni di integrale, le pseudo-distanze e seminorme L^1 ed L^2 sulle funzioni di più variabili "sommabili" o a quadrato "sommabile", cfr. FT 21.

10-*distanza discreta:* per un insieme F qualsiasi la distanza *discreta* (o banale) è

$d(x,y) = \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & x \neq y \end{cases}$. $\qquad$ Per tale distanza $\{x\} = B(x,r) = \overline{B}(x,r)$ se $0 < r < 1$. Se $r = 1$ sempre $\{x\} = B(x,1)$ ma $\overline{B}(x,r) = F$ che può avere altri elementi oltre ad x. Se $r > 1$ invece $F = B(x,r) = \overline{B}(x,r)$.

<u>Nota 15:</u> come mostra la distanza discreta non tutte le distanze su uno spazio vettoriale derivano da una norma (così come non tutte le norme derivano da prodotti). In effetti si possono generare, data una qualsiasi distanza, altre distanze *limitate* e che quindi non possono soddisfare $nd1$) la 1-omogeneità (Talete). Per esempio:

11- *Esercizio:* Sia $d : X \times X \to \mathbf{R}^+$ una distanza sull'insieme X. Allora le seguenti funzioni sono distanze su X:

$d_1(a,b) = \frac{d(a,b)}{1+d(a,b)}$; $\quad \bullet\ d_2(a,b) = \operatorname{artan}(d(a,b))$;

$d_3(a,b) = \min\{d(a,b), 1\}$;

$\bullet d_4(a,b) = \Psi(d(a,b)),\ \ \Psi : [0; +\infty) \to [0; ; +\infty)$ concava, non negativa, nulla in 0 .

[B] per V.Barutello et al. Analisi mat. vol. 2;

[F] per N.Fusco et al. An.Mat. due;

[FS] per N.Fusco et al. Elem. di An. Mat. due, versione semplificata.

SPAZI ASTRATTI: METRICI, VETTORIALI NORMATI, CON PRODOTTO SCALARE:

[B] cap. IV.3 pagg.178-180; cap.IV.3 Esem.(IV.88) pagg. 210-211 (funzioni trigonometriche e prodotto scalare L2); cap. VII par. da 1 a 5 pagg. 331-348, in particolare distanze L1 ed uniforme nel piano pag.332, per funzioni continue pag. 333-334 e distanza L2.

[F] cap. 1.8 formule da (8.10) a(8.12) pagg.53-53; cap.2 pagg 75-120 in particolare: formula (15.6) pag. 83, distanza uniforme per funzioni continue Esem. 4 pag. 79, distanze Lp negli spazi cartesiani pagg.96-97.