Analisi Matematica II, Anno Accademico 2017-2018.
Ingegneria Edile e Architettura

Vincenzo M. Tortorelli

FOGLIO DI TEORIA n. 4, cfr. FE 1, 2
FUNZIONI DI UNA VARIABILE IN SPAZI CARTESIANI:
SUCCESSIONI, CURVE E CAMMINI IN SPAZI CARTESIANI

Funzioni di una variabile e successioni a valori in spazi cartesiani

Sia $I \subseteq \mathbf{R}$ un intervallo (semiretta, retta o segmento), o $I = \mathbf{N}$, $f : I \to \mathbf{R}^m$
- $f(t) = (f_1(t), \dots f_m(t))$ se I è un intervallo,
- $f(n) = f_n = (f_{1,n}, \dots, f_{m,n})$ se $I = \mathbf{N}$: la funzione f non è altro che una *successione*.

Sottosuccessioni: una *sottosuccessione* f_{n_k} di una qualsiasi successione f_n è la composizione di f con una successione n_k divergente di numeri naturali.

Limiti: - si dice che $f(t) = (f_1(t), \dots f_m(t))$ tende al *vettore* $v = (v_1, \dots v_m) \in \mathbf{R}^m$, per $t \in I$ che tende a $s \in \overline{I}$ (intervallo chiuso), o $s = +\infty$, $s = -\infty$, in simboli

$$f(t) \to v,\ t \to s,\ t \in I, \text{ o } f(t) \xrightarrow[t\to s,\ t\in I]{} v, \text{ o anche } \lim_{t\in I,\ t\to s} f(t) = v, \text{ se}$$
$$\lim_{t\in I,\ t\to s} d_{E,m}(f(t), v) = \lim_{t\in I,\ t\to s} |f(t) - v|_{E,m} = 0.$$

- Equivalentemente, per la 1) delle diseguaglianze per componenti (Foglio T. 2), ogni funzione o successione *componente* $f_i(t)$, $f_{i,n}$, $1 \le i \le m$, converge all'omologa componente v_i di v.

Osservazione: - valgono le usuali regole dei limiti di funzioni e successioni a valori reali.
- • In particolare una *successione convergente* ha immagine *limitata*.
- • Trattando in $\mathbf{R}^m$ di *distanze vere* e proprie il limite se esiste è *unico*.

Chiusi per successioni: - un sottoinsieme C di $\mathbf{R}^m$ si dice *chiuso per successioni*, se per ogni successione $f : \mathbf{N} \to C$ se $f_n \to v \in \mathbf{R}^m,\ n \to \infty$ allora $v \in C$.

Compatti per successioni: - $C \subseteq \mathbf{R}^m$ è *compatto per successioni*, se ogni $f : \mathbf{N} \to C$, $f_n \in C$, ha una sottosuccessione f_{n_k} convergente per $k \to \infty$ a un v *che sia elemento di* C.

Osservazione: • i sottoinsiemi chiusi di un compatto sono compatti.

Equivalenza tra chiusi e chiusi per successioni: $C \subseteq \mathbf{R}^m$ è chiuso se e solo se è chiuso per successioni.

Dimostrazione. Se C è chiuso il limite di una successione convergente di suoi elementi non può stare nel complementare $\mathbf{R}^m \setminus C$ che è aperto: ogni punto di $\mathbf{R}^m \setminus C$ ha un intorno disgiunto da C ovvero *non vi ci si può avvicinare con punti di* C. Viceversa se C è chiuso per successioni, dato $z \notin C$ del complementare, se ogni palla $B(z, \frac{1}{n})$, $n \in \mathbf{N}$, contenesse almeno un elemento x_n di C si avrebbe $d_m(x_n, z) \le \frac{1}{n}$, quindi: $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z \notin C$, diversamente da quanto assunto. Perciò per ogni $z \in \mathbf{R}^m \setminus C$ vi è una palla di centro z inclusa in $\mathbf{R}^m \setminus C$.

Osservazione: - quindi la chiusura $\overline{E}$ di un insieme E è l'insieme dei limiti di successioni a valori in E: i punti *approssimabili* con punti di E .
- I punti di accumulazione per E sono quelli approssimabili con successioni *non* definitivamente *costanti* di elementi di E.

Teorema di Bolzano Weiestrass (dimensione finita): un sottoinsieme di $\mathbf{R}^m$ è compatto per successioni se e solo se è *limitato ed anche chiuso per successioni*.

Dimostrazione . - È *sempre vero* che un compatto è chiuso e limitato. È chiuso: le sottosuccessioni hanno lo stesso limite della successione. È limitato: se no vi sarebbero $v_n \in C$ per cui $|v_n|_m \ge n \in \mathbf{N}$: tutte le sottosuccesioni di v_n sarebbero illimitate e non convergerebbero.
- *Per il viceversa* è necessaria la *dimensione finita*: data una successione $y_n \in C,\ n \in \mathbf{N}$, si usa per ogni successione componente $y_{i,n}$, che è limitata per la diseguagllianza $|y_i| \le |y|_m$, il teorema per successioni a valori reali: *dopo m sottosuccesioni* si ha un limite, ed essendo C chiuso tale limite gli appartiene.

Curve e cammini in forma parametrica

Continuità: - f si dice continua in $s \in I$ se lo sono le funzioni componenti.
- Per la diseguaglianza per componenti, FT. 2-1) ciò è vero se e solo se

$$\lim_{t\in I,\ d_{E,1}(t,s)\to 0} d_{E,m}(f(t),f(s)) = \lim_{t\in I,\ t\to s} |f(t)-f(s)|_{E,m} = 0.$$

- Una funzione di una variabile continua in tutti i punti di I si dice *curva parametrica*, o *cammino*. Può esser interpretata come *legge oraria*. L'immagine si dirà *sostegno* o *traiettoria*.
Osservazione: valgono le usuali regole proprietà delle funzioni continue a valori reali con l'eccezione della proprietà del valore intermedio che si traduce nel dire che l'immagine continua di un intervallo è "tutta di un pezzo".
Teorema di Weiestrass 1: l'immagine continua di un compatto è compatta.
Dimostrazione. Sia f continua su D compatto. Sia $y_n = f(x_n) \in D,\ n \in \mathbf{N}$ una successione in $\mathrm{Im}_D f$. Per ipotesi vi sono $c \in D$ e $x_{n_k} \in D,\ k \in \mathbf{N}$ per cui $x_{n_k} \to c,\ k \to \infty$. Per continuità di f si ha $y_{n_k} \to f(c) \in \mathrm{Im}_D f$.
Curve chiuse: - Una cammino f definito su un segmento chiuso $I = [a;b],\ a,b \in \mathbf{R}$ si dice *chiuso* se $f(a) = f(b)$.
Curve semplici: - Un cammino f si dice *semplice* se è iniettivo tranne al più per l'eguaglianza tra i valori agli eventuali due estremi dell'intervallo. Nel caso si dirà cammino *semplice chiuso.*

Derivabilità: f si dice derivabile in $s \in I$ se lo sono le funzioni componenti. Nel caso si indica con $\frac{df}{dt}(s)$ o $f'(s)$ il vettore che ha come componenti le derivate in s delle funzioni componenti di f. Tale *vettore* si dirà *derivata* di f in s. Considerando f come legge oraria la derivata in s rappresenta la velocità all'istante s. Per la diseguaglianza per componenti 1) ciò è vero se e solo se vale la proprietà di *approssimazione lineare al primo ordine*:

$$\lim_{t\to s} \left| \frac{f(t)-f(s)-(t-s)f'(s)}{t-s} \right|_{E,m} = 0.$$

Osservazione: valgono le usuali regole proprietà delle funzioni derivabili: linearità della derivata, derivate di prodotti (scalari e vettoriali) etc. .
Versori tangenti: se vi è la derivata di f in s ed è un vettore *non nullo*, il versore (vettore unitario) $\frac{f'(s)}{|f'(s)|_{E,m}}$ si dirà *tangente all'immagine di f all'istante s* (nel punto $f(s)$).

Osservazione: la giustificazione di tale definizione è che *l'incremento vettoriale* $f(t) - f(s)$ ("spostamento"che individua la "corda" sull'immagine di f tra il punto $f(s)$ e il punto $f(t)$), rinormalizzato dividendo per $t - s$, tende per $t \to s$, a $f'(s)$.
Questi *se non nullo identifica una ben precisa direzione orientata.*
Si osserva infatti che un versore tangente da informazioni anche sul "verso di percorrenza (orientazione)" dell'immagine di f nell'istante s.
Osservazione: - si osserva che potendo essere f non iniettiva $(f(s) = f(u),\ s \neq u \in I)$ vi possono essere diversi versori tangenti all'immagine di f nel punto $f(s) = f(u)$ in diversi istanti s e u.
- Analoghi fenomeni (o "peggiori") si hanno se $f(s) = \lim_{n\to\infty} f(t_n)$ per qualche successione $t_n \in I,\ n \in \mathbf{N}$ *non convergente* ad un elemento di I. Si veda l'esempio nel caso I fosse la retta o una semiretta o $\mathbf{N}$, e se t_n fosse *divergente*. La regolarità forte esclude tali fenomeni:

Cammini regolari: - un cammino n f si dice *regolare (debolmente)* su un intervallo I se è derivabile su tutto I, con il vettore "velocità" f' continua in tutti i punti di I, e mai nullo tranne al più gli eventuali estremi di I.
- Se f *non* è chiuso e $I = [a;b] \subseteq \mathbf{R}$ è un segmento chiuso si dice *regolare in senso forte* se $f' \neq 0$ su tutto $[a;b]$.
- Se f è chiuso e $I = [a;b] \subseteq \mathbf{R}$ è un segmento chiuso si dice *regolare in senso forte* se non solo $f' \neq 0$ su tutto $[a;b]$ ma anche i versori tangenti negli istanti $a,\ b \in \mathbf{R}$ sono eguali.

Esempio: $f(t)=\left(te^{-t},t^2e^{-t}\right)$: $f(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}(0,0)=f(0)$, $\dfrac{f'(t)}{|f'(t)|}\xrightarrow[t\to+\infty]{}(0,-1)\neq\dfrac{f'(0)}{|f'(0)|}=(1,0)$.

Osservazione: - per un cammino chiuso f su $I=[a;b]$, $a,\ b\in\mathbf{R}$, solo (debolmente) regolare si potrebbero avere (se pur f fosse semplice chiuso) strani comportamenti in $f(a)=f(b)$, come per cammini non chiusi su intervalli non chiusi o illimitati.

- Se $f'(a)$ e $f'(b)$ fossero entrambi non nulli e diversi potrebbero avere punti angolosi (due versori tangenti non allineati), cuspidi (due versori tangenti allineati ma di verso opposto).

- Se uno tra $f'(a)$ e $f'(b)$ fosse nullo si potrebbero avere infiniti avvolgimenti o oscillazioni avvicinandosi a $f(a)=f(b)$: non sarebbe ben definito, nemmeno al limite, il versore tangente.

Rette tangenti: se esiste $f'(s)$ ed è un vettore *non nullo*, si dirà quindi *retta tangente all'immagine di f all'istante s (nel punto $f(s)$)*, la retta in forma *parametrica* data dall'immagine della funzione lineare affine $r(t)=f(s)+tf'(s),\ t\in\mathbf{R}$. Come sopra potrebbero esserci più rette tangenti nel punto $f(s)$ nei diversi istanti t in cui la traiettoria passa in $f(s)$ o all'infinito.

Esempio: - per esempio si consideri $f(t)=(\cos t,\sin 2t),\ 0\le t\le 2\pi,\ f'(t)=(-\sin t,2\cos 2t)$ mai nulla, $s=\frac{\pi}{2}\neq u=\frac{3}{2}\pi$. Si ha: $f(\frac{\pi}{2})=(0,0)=f(\frac{3}{2}\pi)$, $f'(\frac{\pi}{2})=(-1,-1)\neq f'(\frac{3}{2}\pi)=(1,-1)$, che rispettivamente individuano i versori tangenti di argomento $\frac{5}{4}\pi$ ed $\frac{7}{4}\pi$.

In effetti l'immagine di f su I è a forma di "otto" orizzontale centrato in $(0,0)$: il "lobo" destro percorso in senso antiorario, quello sinistro in senso orario.

- Si consideri $f(t)=t^3(\cos\frac{1}{t},\sin\frac{1}{t},1),\ t\in(0;\pi],\ f(0)=(0,0,0)$. Tale funzone è continua e derivabile con derivata continua: $f'(t)=3t^2(\cos\frac{1}{t},\sin\frac{1}{t},1)+t(\sin\frac{1}{t},-\cos\frac{1}{t},0)$, $f'(0)=(0,0,0)$. La sua immagine è contenuta nel cono definito da $z=\sqrt{x^2+y^2}$, e per $t\to 0^+$ *gira infinite volte allontanandosi dall'origine*. Per $t=0$ non è individuata alcuna retta tangente.

Integrabilià: f si dice integrabile (secondo Riemann, rispettivamente assolutamente integrabile in senso improprio) sull'intervallo I se rispettivamente lo sono le funzioni componenti. Nel caso con $\displaystyle\int_I f(t)\,dt$ si indica il vettore che ha come componenti gli integrali su I delle funzioni componenti, e lo si dirà integrale di f su I: $\displaystyle\int_I f(t)dt=\left(\int_I f_1(t)dt,\ldots,\int_I f_m(t)dt\right)$.

Gli enunciati seguenti si deducono direttamente da quelli per funzioni a valori in $\mathbf{R}$.

Linearità dell'integrale vettoriale: Se f e g sono integrabili sull'intervallo I, $\lambda\in\mathbf{R}$, allora tale è la funzione $f+\lambda g$ e $\displaystyle\int_I (f(t)+\lambda g(t))\,dt\ =\ \int_I f(t)\,dt\ +\ \lambda\int_I g(t)\,dt$

Additività dell'integrale: Se f è integrabile sugli intervalli I e J con parti interne disgiunte allora $\displaystyle\int_{I\cup J} f(t)\,dt\ =\ \int_I f(t)\,dt\ +\ \int_J f(t)\,dt.$

Teorema fondamentale del calcolo per cammni e integrazione per parti:

Se f è continua sull'intervallo I a valori in $\mathbf{R}^m$ e $a\in I$ allora la funzione vettoriale integrale $F(t)=\displaystyle\int_a^t f(s)ds$ è derivabile in ogni punto di I e ha come derivata $f(t)$.

Quindi se $f,\ g:I\to\mathbf{R}^m$ sono funzioni derivabili sull'intervallo I con derivate continue, $a,\ b\in I$ si ha $\displaystyle\int_a^b f'(s)ds=f(b)-f(a)$, $\displaystyle\int_a^b\langle f'(s)\cdot g(s)\rangle ds=\langle f\cdot g\rangle]_a^b\ -\ \int_a^b\langle f(s)\cdot g'(s)\rangle ds$,

Diseguaglianza triangolare per gli integrali: Se $f:I\to\mathbf{R}^m$ è integrabile su I si ha:

$$\left|\int_I f(t)dt\right|_{E,m}\ \le\ \int_I |f(t)|_{E,m}\,dt.$$

Dimostrazione: Per il corollario alla diseguaglianza di Cauchy-Schwarz:

$\displaystyle\left|\int_I f(t)dt\right|_{E,m}=\max_{v:|v|_{E,m}=1}\langle\int_I f(t)dt\cdot v\rangle=$ per linearità dell'integrale $\displaystyle=\max_{v:|v|_{E,m}=1}\int_I\langle f(t)\cdot v\rangle\,dt\le$ fissato $t\in I$ applicando a $\langle f(t)\cdot v\rangle$ la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz

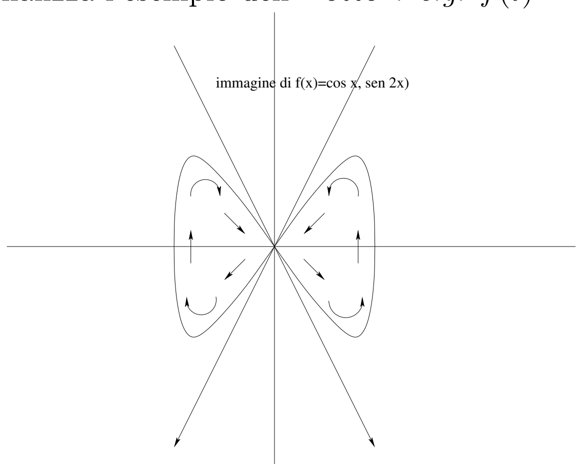
$\displaystyle\le\max_{v:|v|_{E,m}=1}\int_I |f(t)|_{E,m}|v|_{E,m}dt=\max_{v:|v|_{E,m}=1}\int_I |f(t)|_{E,m}dt=\int_I |f(t)|_{E,m}dt.$

<u>**Sulla nozione di tangenza:**</u> per una funzione vettoriale di una variabile derivabile $t \mapsto f(t)$, se per un valore del parametro z si ha $f'(z) \neq 0$ allora *l'immagine* di un intervallo sufficientemente *piccolo* attorno a z ha tangente nel punto $f(z)$ data dall'immagine del cammino lineare $s \mapsto f(z) + sf'(z)$: poichè vi è derivabilità $f(t) = f(z) + f'(z)(t-z) + \varepsilon$ con $|\varepsilon|/|t-z| \to 0$ per $t \to z$. Quindi confrontando la distanza tra un punto dell'immagine dalla sua proiezione ortogonale sulla retta in questione:

$$\frac{\left|f(t) - \left(\left\langle (f(t)-f(z)) \cdot \frac{f'(z)}{|f'(z)|}\right\rangle \frac{f'(z)}{|f'(z)|} + f(z)\right)\right|}{|f(t)-f(z)|} = \frac{\left|\varepsilon - \left\langle \varepsilon \cdot \frac{f'(z)}{|f'(z)|}\right\rangle \frac{f'(z)}{|f'(z)|}\right|}{|f'(z)(t-z)+\varepsilon|} \leq \frac{2|\varepsilon|}{|f'(z)(t-z)+\varepsilon|}$$

infinitesimo.

- Se in un punto $f(y)$ "ci si ferma" ("velocità " nulla $f'(y) = 0$) in effetti si può ripartire con inclinazione diversa: *e.g.* $f(t) = (t^3, |t|t^2)$, $t = y = 0$, la cui immagine è il grafico del modulo che non ha una sola tangente in $(0,0)$.
- D'altronde un cammino può ripassare con diversa inclinazione per punti ove è "già " passato, per questo il vettore derivata nonnullo dà la tangente solo dell'immagine di un segmento abbastanza piccolo. Si rianalizza l'esempio dell' "otto": *e.g.* $f(t) = (\cos t, \sin 2t)$



"passa" da $(0,0)$ sia per $t = y_1 = \pi/2$ che per $t = y_2 = 3\pi/2$ ma con velocità sghembe.
- Per un cammino regolare semplice (derivabile con derivata sempre nonnulla ed iniettivo) vi è quindi tangente in ogni punto dell'immagine. Il grafico di una funzione di una variabile $x \mapsto g(x)$ derivabile può essere visto come immagne di un cammino vettoriale $t \mapsto f(t) = (t, g(t))$ che è sempre iniettivo e con vettore derivata $f'(t) = (1, g'(t))$ sempre nonnullo.

Altri esempi

<u>Esempio 1:</u> trovare una parametrizzazione $q(t)$ semplice del quadrato di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$: primo lato $t(1,0)$, $0 \leq t \leq 1$, secondo lato $(1,0) + (t-1)(0,1), 1 \leq t \leq 2$, terzo lato $(1,1) - (t-2)(1,0), 2 \leq t \leq 3$, quarto lato $(0,1) - (t-4)(0,1), 3 \leq t \leq 4$. Se nei vertici si sceglie una delle due velocità, si ottiene una funzione vettoriale discontinua negli istanti di passaggio per i vertici.

<u>Esempio 2:</u> trovare una parametrizzazione C^1 del quadrato di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$: si cerca $Q(s) = q(t(s)) 0 \leq s \leq 4$, $t(s)$ crescente con immagine $[0;4]$. Negli istanti S di passaggio per i vertici V essendoci angoli dovrá essere $Q'(S) = (0,0)$. Scegliendo la derivata sinistra di q si ha $Q'(S) = q'(t(S))t'(S)$. Ma qualsiasi scelta di q' è sempre non nullla, quindi sul primo lato si deve avere $t'(0) = t'(1) = 0$. Quindi si puo' scegliere per esempio $t(s) = \frac{1-coss\pi}{2}$, $0 \leq s \leq 1$. Sugli altri lati si procede in modo analogo.

<u>Esempio 3:</u> confrontare le velocità agli istanti iniziali e finali, e il modo di percorrere il sostegno, dei cammini ($cos(2\pi e^t), \sin(2\pi e^t))$, $0 \leq t \leq \log 6$, $(\cos s, \sin s)$, $2\pi \leq s \leq 12\pi$. Quale dei due è chiuso-regolare?

[B] per V.Barutello et al. Analisi mat. vol. 2;

[F] per N.Fusco et al. An.Mat. due;

[FS] per N.Fusco et al. Elem. di An. Mat. due, versione semplificata.

[FS] cap.4.34,41, 42 pagg.155-164, pag. 190 (Lemma formula (41.1)), pagg.192-194.

[B] cap. VI Teo. VI.43 pag. 301; cap. VII.2,3 Esem. VII.16 pagg.336-337, pagg. 338-342; cap V.1,2,3 pagg.227-239.

[F] cap.2.22 pagg.108-110; cap 3.38 pagg. 176-179; cap. 4.43 pag. 228(Lemma formule (43.13) e(43.14)); cap.6.60 pagg.311-319.