Analisi Matematica II, Anno Accademico 2017-2018.
Ingegneria Edile e Architettura
Vincenzo M. Tortorelli
FOGLIO DI TEORIA n. 5, cfr. FE 1, 3 e 4
SUCCESSIONI, COMPATTI, CONNESSI E PRIMA PARTE CONTINUITÀ

La nozione di continuità ha grande rilevanza. Può esser intodotta in ambito molto astratto, qui per funzioni tra spazi metrici "ripetendo" quanto già scritto per funzioni di una variabile.
La nozione di funzione continua. - Sia $f : D \to E$, D con (pseudo)-distanza d, ed E con (pseudo)-distanza d', $u \in D$. Si dice che f è *continua in u lungo D* se:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ per ogni } x \in D \text{ se } 0 < d(x, u) \leq \delta \text{ allora } d'(f(x), f(u)) \leq \varepsilon,$$

$$\text{- ovvero: } \lim_{\delta \to 0} \sup_{x \in D : d(x,u) \leq \delta} d'(f(x), f(u)) = 0.$$

- ovvero: ogni palla centrata in $f(u) \in E$ contiene l'immagine mediante f di una palla centrata in $u \in D$.
- Altrimenti: la preimmagine di un intorno di $f(u)$ è intorno di u.

<u>Osservazione:</u> se u è un punto isolato dagli altri punti di D da una palla di raggio $\rho > 0$, la premessa dell'implicazione è sempre falsa per $\delta < \rho$. Quindi nel caso di un punto $u \in D$ isolato in D *ogni funzione definita su D* è continua in u lungo D.
<u>Osservazione:</u> nel caso di distanze definite con norme, omettendo di specificare a quale norma ci si riferisce, si ottiene la stessa definizione di continuità che si dà per funzioni di una variabile:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ per ogni } x \in D \text{ se } 0 < |x - u| \leq \delta \text{ allora } |f(x) - f(u)| \leq \varepsilon.$$

<u>Osservazione.</u> - Una funzione f potrebbe esser definita anche su un insieme G, su cui è data la distanza d, più grande di D: $G \supset D$. La distanza su D nel caso è semplicemente data dalla restrizione di d a $D \times D$.
- La continuità di f lungo D in $u \in U$ vuol quindi dire che ogni palla centrata in $f(u) \in E$ contiene l'immagine mediante f *dell'intersezione di D* con una palla centrata in $u \in D$.
- Potrebbe succedere che f è continua in u lungo D ma non continua lungo G.
<u>Esempio:</u> $D = (-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$, $G = \mathbf{R}$, $u = 0$, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $f(x) = 1$ per $x > 0$, $f(x) = 0$ per $x \leq 0$
• Se però f è definita sia su A che su B, ed $u \in A \cap B$, ed f è continua in u lungo A ed è continua in u lungo B, allora si osserva che f è continua in u lungo $A \cup B$. Infatti dato $\varepsilon > 0$ si prende il minimo tra i due δ (quello relativo ad A e quello relativo a B).
Successioni in spazi metrici: Se d è una (pseudo)-distanza su un insieme A, $a \in A$ ed $x : \mathbf{N} \to A$ è una successione si dice che x_n, $n \in \mathbf{N}$ converge ad a se $d(x_n, a) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Si scrive d-$\lim_{n\to\infty} x_n = a$ o $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} a$. È la convergenza $f : (\mathbf{N}, d_{\pm\infty}) \to (A, d)$ [cfr. FT 3 ed 8].
- Per la diseguaglianza triangolare se $x_n \to a$, allora $x_n \to \alpha$ se e solo se $d(a, \alpha) = 0$.
- Se d è una *distanza* il limite se esiste è *unico*.

Chiusi per successioni: - $C \subseteq F$ si dice *chiuso per successioni*, se per ogni successione $f : \mathbf{N} \to C$ se $f_n \to v \in F$, $n \to \infty$ allora $v \in C$.
Compatti per successioni: - $C \subseteq F$ è *compatto per successioni*, se ogni $f : \mathbf{N} \to C$, $f_n \in C$, ha una sottosuccessione f_{n_k} convergente per $k \to \infty$ a un v *che sia elemento di C*.
<u>Osservazione:</u> • i sottoinsiemi chiusi di un compatto sono compatti.

Equivalenza tra chiusi e chiusi per successioni: $C \subseteq F$ è chiuso se e solo se è chiuso per successioni.
Dimostrazione: identica a quella data nel caso di successioni a valori negli spazi cartesiani.
<u>Osservazione:</u> - quindi la chiusura $\overline{E}$ di un insieme $E \subseteq F$ è l'insieme dei limiti di successioni a valori in E: i punti *approssimabili* con punti di E .
- I punti di accumulazione per E sono quelli approssimabili con successioni *non* definitivamente *costanti* di elementi di E.

Continuità sequenziale: f è continua in u lungo D se e solo se
$$\forall s : \mathbf{N} \to D: \ s_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u \implies f(s_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(u).$$

Continuità: - la funzione f si dice *continua su* D se è continua in u lungo D per ogni $u \in D$.
$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall u \in D \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D: \ 0 < d(x,u) \leq \delta \Longrightarrow d'(f(x), f(u)) \leq \varepsilon;$$
$$\text{ovvero:} \quad \textit{per ogni } u \in D \text{ si ha } \lim_{\delta\to 0} \sup_{x\in D: d(x,u)\leq\delta} d'(f(x), f(u)) = 0.$$

Uniforme continuità:- la funzione f si dice *uniformemente* continua su D se:
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall u \in D \ \forall x \in D: \ 0 < d(x,u) \leq \delta \Longrightarrow d'(f(x), f(u)) \leq \varepsilon$$
$$\text{ovvero:} \quad \lim_{\delta\to 0} \sup_{(x,u)\in D\times D: d(x,u)\leq\delta} d'(f(x), f(u)) = 0.$$

Esempio: $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$ è continua su $\mathbf{R}$ ma non uniformemente continua: $(n + \frac{1}{n}) - n \to 0$ ma $(n + \frac{1}{n})^2 - n^2 \to 2$.

Continuità della funzione composta: si premette il principale teorema per costruire funzioni continue:
$f : D \subseteq\to E$, $g : E \to F$, d, d', d'' (pseudo)-distanze rispettivamente su D, E, F,se f è continua in $u \in D$ lungo D e g è continua in $f(u) \in E$ lungo E allora $g{\circ}f : D \in F$ è continua in u. Inoltre composizione di funzioni uniformemente continue lo è.
Dimostrazione: segue direttamente dalle definzioni.

Distanze equivalenti: - due (pseudo)-distanze d, d' su un insieme M, si dicono *metricamente equivalenti* se vi sono due numeri $0 < c \leq C$ per cui $cd(x,y) \leq d'(x,y) \leq Cd(x,y)$.
In altri termini $B_d(x, \frac{r}{C}) \subseteq B'_d(x,r) \subseteq B(x, \frac{r}{c})$.
- Si dicono *topologicamente equivalenti* se danno gli stessi intorni: ovvero ogni palla dell'una contiene una palla dell'altra e viceversa. Equivalentemente hanno stessi aperti e chiusi.

Osservazione: - distanze topologicamente equivalenti hanno stesse successioni convergenti, a stessi limiti. In generale non stesse successioni di Cauchy [cfr. FT 8, reali estesi FT 3].
- Due distanze metricamente equivalenti hanno le stesse successioni di Cauchy [cfr. FT 8].

Teorema di Heine, Cantor, Borel: funzioni continue su un compatto lo sono uniformemente.
Dimostrazione: siano d e d' le distanze su domino e codominio, per assurdo se f non fosse u.c. vi sarebbero un $\varepsilon > 0$ e due successioni di elementi del dominio x_n, u_n $(n \in \mathbf{N})$ per cui $d(x_n, u_n) \to 0$ e $d'(f(x_n), f(u_n)) \geq \varepsilon > 0$. Per compattezza del dominio esisterebbero due sottosuccessioni convergenti y_k, v_k, rispettivamente di x_n e u_n, con limiti rispettivi y e v nel dominio. Ma deve esser $x = v$ poichè: essendo $d(x_n, u_n) \to 0$ anche $d(y_k, v_k) \to 0$ quindi $d(y,v) \leq d(y, y_k) + d(y_k, v_k) + d(v_k, v) \to 0$. Per continuità e ancora per la diseguaglianza triangolare $d'(f(y_k), f(v_k)) \to d'(f(y), f(v)) = 0$ contro l'assunzione $d'(f(x_n), f(u_n)) \geq \varepsilon > 0$.
Teorema di Weierstrass: immagine continua di un compatto è compatta.
Dimostrazione: identica a quella per cammini già esposta.
Corollario: massimi e minimi. Una funzione *a valori reali* continua su un compatto assume un valore massimo e un valore minimo su di esso.
Dimostrazione: i compatti di $\mathbf{R}$ sono i sottoinsiemi chiusi e limitati. Quindi f è limitata. Se $f(x_n) \to \sup_D f$, $n \to \infty$, $x_n \in D$ vi sono $c \in D$ e $x_{n_k} \to c$, $k \to \infty$: per continuità $f(x_{n_k}) \to f(c)$ quindi per unicità del limite $L = f(c)$, $c \in D$. Analogamente per il minimo.

Teorema di Bolzano Weiestrass (dimensione finita): se un insieme è compatto per successioni allora è *limitato ed anche chiuso per successioni.*
Dimostrazione : identica a quella per sottinsiemi di $\mathbf{R}^m$.
- *Il viceversa* è vero in *dimensione finita.* In generale è *falso*: per esempio in ℓ^∞ la successione di successioni $e^1 = (1, 0, \dots)$, $e^2 = (0, 1, 0, \dots)$, $\dots$ $e^k = (0, \dots 0, 1_{k^o \text{ posto}}, 0 \dots)$ $\dots$,ha immagine limitata (conenuta nella palla di raggio 1 di ℓ^∞), ogni sua sottosuccessione è *non convergente* $|e^k - e^h|_{\ell^\infty} = 1$ se $h \neq k$. Quindi l'immagine è chiusa in ℓ^∞ e non compatta.

Osservazione: - nel caso di funzioni a valori in spazi cartesianio $\mathbf{R}^m$, chiaramente dalle diseguaglianze per componenti $|v_i| \leq |v|_m \leq \sqrt{m}\max_j |v_j|$, si ha che una funzione $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$, $x \in D$, è continua in u lungo D se e solo lo sono le sue funzioni componenti. Per funzoni di una variabile reale a valori in spazi cartesiani la trattazione, come visto, è uguale (grazie alla diseguaglianza per componenti) a quella di funzioni reali di una variabile. Quindi la vera novità, che richiede diverse abilità rispetto alla teoria delle funzioni di una variabile, sta appunto nelle più variabili del dominio. Infatti la continuità in più variabili (a fortiori i limiti in più variabili) è difficilmente riconducibile alla continuità in una variabile per ognuna delle variabilil in gioco (continuità *separata* versus *globale*):
- ATTENZIONE! infatti *non è in generale vero* che data una funzione di due variabili $f(x, y)$, $D = \mathbf{R}^2$ e un punto $u = (a, b)$ nel piano cartesiano, per esempio $u = (0, 0)$, per cui le due funzioni $\varphi(x) = f(x, 0)$ e $\psi(y) = f(0, y)$ siano continue rispettivamente in $a = 0$ e in $b = 0$, la funzione f sia continua in $(0, 0)$. Un esempio è il seguente:

Esempio: $$f(x,y) = \begin{cases} 7 & xy = 0 \\ 0 & xy \neq 0 \end{cases}$$

in effetti il grafico di tale funzione è costruito sollevando "a quota" 7, dal piano coordinato in $\mathbf{R}^3$ di equazione $z = 3$ le due rette coordinate (definite dalle due coppie di equazioni $y = 0,\ z = 0$ e $x = 0,\ z = 0$) ottenendo le due rette definite rispettivamente dalle due coppie di equazioni $y = 0,\ z = 7$ e $x = 0,\ z = 7$. Quindi il grafico non è "tutto di un pezzo" pur essendo il dominio $\mathbf{R}^2$ "tutto di un pezzo" come dovrebbe essere per una funzione continua che si rispetti. Cfr. generazione di funzioni continue

Connessi e connessi per archi.

- Un insieme E si dice connesso se non è unione di due aperti *disgiunti e non vuoti.*
- Un insieme E si dice /connesso per archi se dati $p \in E$ e $q \in E$ vi è un cammino continuo $\gamma : [0; 1] \to E$ (con immagine tutta contenuta in E) per cui $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$.
- È una proprietà che riflette una nozione più forte, rispetto a quella di esser connesso, pur basandosi sulla stessa idea intuitiva di esser fatto "tutto di un pezzo" . Il sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$ dato dall'unione del grafico della funzione $\sin\frac{1}{x}$ con il segmento verticale $\{0\} \times [-1; 1]$, considerato in sé, con la restrizione della distanza euclidea, è connesso ma non lo è per archi.
• I sottoinsiemi *convessi* in uno spazio vettoriale normato sono *connessi per archi (per segmenti parametrici).*
- Invece di non immediata dimostrazione, ancorchè intuitivo, è il seguente asserto: non vi sono altri sottoinsiemi di $\mathbf{R}$ connessi se non gli intervalli (segmenti, rette e semirette).
- I sottoinsiemi aperti di $\mathbf{R}^M$ che sono connessi non solo sono anche connessi per archi ma due loro punti possono esser congiunti da un cammino fatto di segmenti paralleli agli assi cartesiani (connessi per poligonali cartesiane).
• - Una funzione *continua trasforma connessi per archi in connessi per archi* (è la continuità della composta di due funzioni continue).
- Trasforma *anche connessi in connessi*, come provato qui di seguito.

Preimmagini di funzioni continue.

Spesso sottoinsiemi interessanti sono unioni finite di soluzioni di sistemi di disequazioni, cioè unioni finite di intersezioni di sottolivelli o sopralivelli stretti o meno di funzioni. Per esempio:

$$\begin{cases} f_1^1(u) & \leq v_1^1 \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ f_{m_1}^1(u) & \leq v_m^1 \end{cases} \quad \text{o anche} \dots \quad \begin{cases} f_1^k(u) & \leq v_1^k \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ f_{m_k}^k(u) & \leq v_m^k \end{cases}$$

Nei casi più significativi se le funzioni $f^j : D_j \to \mathbf{R}^{m_j}$, $1 \leq j \leq k$ sono tutte continue e le diseguaglianze sono tutti o deboli o strette l'insieme risulterà rispettivamente chiuso o aperto.

Aperti o chiusi relativi e distanza indotta. - Dati $p \in D \subseteq G$, d distanza su G, si dice che $A \subseteq D$ è *intorno di p relativamente a D* se vi è $U \subseteq G$ intorno di p per cui $A = U \cap D$. Analogamente si definiscono gli aperti, i chiusi, e le frontiere di sottoinsiemi di D relativi a D.
- La *distanza indotta* su D non è altro che la *restrizione a $D \times D$* della distanza di G: quindi A è un intorno relativo a D di un punto $p \in D$ se e solo se contiene l'intersezione di D con una palla di centro p (palla relativa): $A \supseteq D \cap B(p, \rho)$ per q/ualche $\rho > 0$.

Caratterizzazione mediante preimmagini delle funzioni continue.
- $f : D \to E$ è continua in $u \in D$ lungo D se e solo se la preimmagine di un intorno di $f(u)$ è un intorno di u relativo a D.
- $f : D \to E$ è continua in D se e solo se le preimmagini di sottoinsiemi aperti sono aperti relativi a D se e solo se le preimmagini di sottoinsimei chiusi sono chiusi relativi di D.

Corollario. - Siano $f : D \subseteq \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}^m$ e D *aperto* in $\mathbf{R}^M$. Allora f è continua se e solo se la preimmagine di ogni aperto in $\mathbf{R}^m$ è aperta in $\mathbf{R}^M$.
- Siano $f : D \subseteq \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}^m$ e D *chiuso* in $\mathbf{R}^M$. Allora f è continua se e solo se la preimmagine di ogni chiuso di $\mathbf{R}^m$ è chiusa in $\mathbf{R}^M$.

Corollario. Siano $f : D \to E$ continua e D compatto. Se f è invertibile su D allora $f^{-1} : \mathrm{I}m_D f \to D$ è anch'essa continua. Ovvero f trasforma chiusi in chiusi.
Dimostrazione: se $C \subseteq D$ è chiuso $(f^{-1})^{-1}(C) = \mathrm{I}m_C f$ è chiuso poichè C è chiuso e quindi compatto essendolo D, ed immagine continua di un compatto è compatta e quindi chiusa.
Osservazione: $f : D \to \mathbf{R}^3$, $f(x, y, z) = (x, y, 0)$, $D = \{(\cos t, \sin t, t) : t \in [0; 2\pi)\}$ (un pezzo di elica sul cilindro nello spazio cartesiano tridimensionale): f è invertibile (da D) su $\mathrm{I}m_D f$ che è la circonferenza unitaria $S = \{(\cos t, \sin t, 0) : t \in [0; 2\pi)\}$. Inoltre f è continua su D. Ma la sua inversa g da S in D non è continua: $g(\cos \frac{1}{n}, \sin \frac{1}{n}, 0) = (\cos \frac{1}{n}, \sin \frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \to (1, 0, 0)$ mentre $g(\cos 2\pi - \frac{1}{n}, \sin 2\pi - \frac{1}{n}, 0) = (\cos \frac{1}{n}, -\sin \frac{1}{n}, 2\pi - \frac{1}{n}) \to (1, 0, 2\pi)$, pur convergendo a$(1, 0, 0) \in S$ le due successioni $(\cos \frac{1}{n}, \sin \frac{1}{n}, 0) \in S$ e $(\cos 2\pi - \frac{1}{n}, \sin 2\pi - \frac{1}{n}, 0) \in S$

Omeomorfismi

Omeomorfismi. Una funzione continua $f : D \to E$ ed invertibile si dice *omeomorfismo* tra $D = \mathrm{D}om f$ e $\mathrm{I}m f \subseteq E$ se la funzione inversa è continua *su* $\mathrm{I}m f$ anch'essa.

Generazione di funzioni continue

Il seguente teorema , in più punti, permette di riconoscere e costruire molte funzioni continue.
Generazione di funzioni continue 1): teorema di composizione.
$f : D \subseteq\to E$, $g : E \to F$, d, d', d'' distanze rispettivamente su D, E, F,se f è continua in $u \in D$ lungo D e g è continua in $f(u) \in E$ lungo E allora $g_\circ f : D \in F$ è continua in u. Inoltre composizione di funzioni uniformemente continue lo è.
Generazione di funzioni continue 2): prodotto cartesiano di funzioni
- *distanze prodotto:* se $d_1, \ldots, d_m$ sono distanze rispettivamente sugli insiemi $E_1, \ldots, E_m$ allora
$d_{\times_{\ell^1}}((x_1, \ldots, x_m), (y_1, \ldots, y_m)) = d_1(x_1, y_1) + \cdots + d_m(x_m, y_m)$,
$d_{\times_{\ell^\infty}}((x_1, \ldots, x_m), (y_1, \ldots, y_m)) = \max\{d_1(x_1, y_1), \ldots, d_m(x_m, y_m)\}$,
$d_{\times_{\ell^2}}((x_1, \ldots, x_m), (y_1, \ldots, y_m)) = \sqrt{(d_1(x_1, y_1))^2 + \cdots + (d_m(x_m, y_m))^2}$
sono, grazie alla diseguaglianza per componenti, distanze equivalenti su $E_1 \times \cdots \times E_m$.
(L'unica difficoltà è provare la diseguaglianza triangolare per $d_{\times_{\ell^2}}$. Si prova usando la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz con i vettori di $\mathbf{R}^m$ dati da $(d_1(x_1, z_1), \ldots d_m(x_m, z_m))$ e $(d_1(y_1, z_1), \ldots d_m(y_m, z_m))$.)
- $f_1 : D \to E_1, \ \ldots, f_m : D \to E_m$, d_i distanza su E_i $\ 1 \le i \le m$, se $f_1, \ldots, f_m$ sono continue in u allora anche $f = (f_1, \ldots, f_m) : D \to E_1 \times \ldots E_m$, avendo il codominio equivalentemente una delle distanze prodotto, è continua in u.
Generazione di funzioni continue 3): continuità uniforme delle funzioni lineari tra spazi cartesiani, (polinomi di primo grado).
$c \in \mathbf{R}$, $v = (v_1, \ldots, v_M) \in \mathbf{R}^M$, $f : \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}$, $f(x) = \langle x \cdot v\rangle + c = x_1 v_1 + \cdots + x_M v_M + c$. Poichè $\ |f(x) - f(y)| = |\langle (x - y) \cdot v\rangle| \le |v|_M |x - y|_M$, $\ $ la funzione f è *uniformemente continua*.
<u>Osservazione:</u> - in particolare le coordinate $\pi_i(x_1, \ldots, x_M) = x_i$, $1 \le i \le M$, sono continue.
- In particolare ogni combinazione lineare $F(x) = \lambda f(x) + \mu g(x)$, $\lambda,\ \mu \in \mathbf{R}$, di funzioni, $f,\ g : D \subseteq \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}^m$, continue è continua. Infatti $S : \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$, $S(u, v) = \lambda u + \mu v$ è lineare e quindi continua per 2) e 3), $V : D \to \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m$, $V(x) = (f(x), g(x))$ è continua per ipotesi e per 2). Ma $F(x) = S(V(x))$ e quindi per 1) è continua.
Funzioni Hölderiane e Lipschitziane: Con egual ragionamento se vi è $\alpha \in (0; 1]$ per cui:
$\sup\limits_{x,\ y \in D} \dfrac{d'(f(x), f(y))}{(d(x, y))^\alpha} = L < +\infty$ la funzione f è *uniformemente continua su* D.
- Se $\alpha = 1$ la f si dice *Lipschitziana* su D: ha cioè *"rapporti incrementali" limitati* su D.
- I numeri L ed α si dicono rispettivamente costante ed esponente di Hölderianità.
Generazione di funzioni continue 4): continuità prodotti.
$u = (u_1, \ldots, u_M)$, $P : \mathbf{R}^M \times \to \mathbf{R}$, $P(x) = P(x_1, \ldots, x_M) = x_i x_j$. Poichè

$$|P(x) - P(u)| = |x_i x_j - u_i u_j| = |(x_i - u_i)x_j - u_i(u_j - x_j)| \le |x_i - u_i||x_j| + |u_i||u_j - x_j|,$$

essendo u fisso, per la diseguaglianza per componenti, se $|u - x|_M$ è piccolo asufficienza tale sarà l'ultimo addendo essendolo $|u_j - x_j|$.
Per vedere che il primo addendo è piccolo quanndo lo sia $|x - u|_m$ si argomenta similmente. Se $|u - x|_M$ è piccolo in particolare lo saranno sia $|x_j - u_j|$ che $|x_i - u_i|$; il primo potrà esser supposto questa volta semplicemente minore di 1 ottenendo quindi $|x_j| \le |u_j| + 1$.
Quindi anche il primo addendo sarà piccolo quando $|u - x|_M$ è piccolo a sufficienza . Pertanto P risulta continua in u.
<u>Osservazione:</u> - iterando prodotti si ha che i *monomi* in M variabili $x_1^{n_1} \cdot \ldots x_M^{n_M}$ definiscono funzioni continue. Da 3) e 4) segue che i *polinomi* in M variabili definiscono funzioni continue.
<u>Osservazione:</u> - Con lo stesso argomento si mostra che se U, V, W sono spazi vettoriali con norme rispettivamente $|\cdot|_U$, $|\cdot|_V$, $|\cdot|_W$, e $P : U \times V \to W$ è una funzione bilineare per cui vi è $C \in \mathbf{R}$ e $|u \cdot_P w|_W \le C|u|_U|v|_V$ (cioè $\sup\limits_{u \in U, v \in V} \dfrac{|u \cdot_P w|_W}{|u|_U |v|_V} < \infty$), allora P è continua avendo il dominio la distanza prodotto.

Esempio: - in uno spazio metrico (M,d) la distanza da un fissato punto $p \in M, f(x) =: d(x,p)$, è una funzione Lipschitziana: $|d(x,p) - d(y,p)| \leq d(x,y)$.

- In particolare una norma $| \ |_U$ su uno spazio vettoriale U è una funzione continua rispetto alla distanza da essa definita: è infatti Lipschitziana con costante $L = 1$ grazie alla diseguaglianza triangolare:

$$||x|_U - |y|_U| \ \leq \ |x-y|_U$$

- Nel caso della norma euclidea si prova la sua continuità anche osservando che $|x|_M = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_M^2}$: è composizione di $R : [0;+\infty) \to \mathbf{R}$, $R(t) = \sqrt{t}$ con il polinomio $P : \mathbf{R}^M \to [0;+\infty)$, $P(x) = x_1^2 + \cdots + x_M^2$.

- Per (M,d) metrico $d : (M \times M, d_\times) \to \mathbf{R}$, è continua: $|d(x,y) - d(a,b)| \leq \sqrt{2} d_\times((x,y),(a,b))$.

- Il prodotto scalare euclideo $\langle \ \cdot \ \rangle : \mathbf{R}^M \times \mathbf{R}^M \sim \mathbf{R}^{2M} \to \mathbf{R}$ è una funzione continua essendo definito da un polinomio di $2M$ variabili.
Alternativamente si deduce la continuità per bilinearità come sopra oosservato:

$$|\langle x \cdot y \rangle - \langle u \cdot v \rangle| = |\langle (x-u) \cdot y \rangle - \langle u \cdot (v-y) \rangle| \leq |x-u||y| + |u||v-y|.$$

Osservazione: se U e V sono spazi vettoriali con prodotti scalari rispettivi $\langle \ \cdot \ \rangle_U$ e $\langle \ \cdot \ \rangle_V$, allora $\langle (u,v) \cdot (u',v') \ \rangle_\times = \langle u \cdot u' \rangle_U + \langle v \cdot v' \rangle_V$ è un prodotto scalare su $U \times V$ che definisce la distanza prodotto delle distanze su U e V.

Generazione di funzioni continue 5):
separata continuità uniforme rispetto ad una variabile.
Siano $f : E \times F \to G$, (E,d), (F,d'), $(G,\widetilde{d})$ spazi metrici, $(a,b) \in E \times F$. Se vi è $r > 0$:
$x \mapsto f(x,b)$ continua in a,
$y \mapsto f(z,y)$ sono continua in b uniformemente rispetto a z che varia in $B_d(a,r)$, cioè:
$\sup_{d(z,a)<r} \widetilde{d}(f(z,y), f(z,b)) \xrightarrow{y \to b} 0$,
allora f è continua in (a,b), equivalentemente per una delle distanze prodotto su $E \times F$.

Dimostrazione: sia x per cui $d(x,a) < r$, allora
$\widetilde{d}(f(x,y), f(a,b)) \leq \widetilde{d}(f(x,y), f(x,b)) + \widetilde{d}(f(x,b), f(a,b)) \leq$
$$\leq \sup_{d(z,a)<r} \widetilde{d}(f(z,y), f(z,b)) + \widetilde{d}(f(x,b), f(a,b))$$
passando al limite per $d(x,a) + d'(y,b) \to 0$ la tesi.

Corollario: Siano $f : E \times F \to G$, (E,d), (F,d'), $(G,\widetilde{d})$ spazi metrici, se
$x \mapsto f(x,y)$ sono continue per ogni $y \in Y$
$y \mapsto f(x,y)$ sono Hölderiane di egual costante per ogni $x \in X$
allora f è continua.

Un altro controesempio

$f(x,y) = \begin{cases} (\sin(2\pi \frac{y}{x^2} 2))^2 & \text{se } x^2 < 2y < 2x^2, \\ f(x,y) = 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$. Funzione con restrizioni a rette continue in tutti i punti, continua nei punti diversi da $(0,0)$ ma non continua in $(0,0)$: a parte l'origine è costante sulle parabole.

[B] per V.Barutello et al. Analisi mat. vol. 2;

[F] per N.Fusco et al. An.Mat. due;

[FS] per N.Fusco et al. Elem. di An. Mat. due, versione semplificata.

LIMITI E CONTINUITA' PER FUNZIONI DI PIU' VARIABILI

[FS] pagg. 35-41, 81-83.

[B] pagg. 247-255.

[F] pagg. 121-125.

SPAZI ASTRATTI: METRICI, VETTORIALI NORMATI, CON PRODOTTO SCALARE:

[B] cap. IV.3 pagg.178-180; cap.IV.3 Esem.(IV.88) pagg. 210-211 (funzioni trigonometriche e prodotto scalare L2); cap. VII par. da 1 a 5 pagg. 331-348, in particolare distanze L1 ed uniforme nel piano pag.332, per funzioni continue pag. 333-334 e distanza L2.

[F] cap. 1.8 formule da (8.10) a(8.12) pagg.53-53; cap.2 pagg 75-120 in particolare: formula (15.6) pag. 83, distanza uniforme per funzioni continue Esem. 4 pag. 79, distanze Lp negli spazi cartesiani pagg.96-97, Aperti connessi pagg. 112-114.