Analisi Matematica II, Anno Accademico 2017-2018.
Ingegneria Edile e Architettura
Vincenzo M. Tortorelli
FOGLIO DI TEORIA n. 7, cfr. FE 2
LUNGHEZZA, ASCISSA CURVILINEA,
INTEGRAZIONE NON ORIENTATA E INTEGRAZIONE ORIENTATA
Lunghezza, rettificabiltà

Definizione astratta di lunghezza. - Siano (X, d) uno spazio metrico e $f : I \to X$, $I \subseteq \mathbf{R}$ intervallo, una funzione continua. Si dice *lunghezza* del cammino f

$$\ell(f) \ =: \ \sup\{\sum_{i=1}^{k-1} d((f(t_i), f(t_{i+1})) : \ k \in \mathbf{N}, \ t_1 \leq \cdots \leq t_k \text{ suddivisione di } I\} =$$
$$= \sup\{\sum_{i=1}^{k-1} d((f(t_i), f(t_{i+1})) : \ k \in \mathbf{N}, \ t_1 < \cdots < t_k \text{ suddivisione di } I\}$$

- Se $\ell(f) < +\infty$ si dirà che il cammino è *rettificabile.*

Osservazione: - se $X = \mathbf{R}$ con la distanza euclidea, $f(t) = t$, $I = [a; b]$ si ha $\ell(f) = b - a$. Analogamente per segmenti parametrizzati in spazi cartesiani $f(t) = Q + tv \in \mathbf{R}^m$, $I = [0; 1]$, di estremi Q e $P = Q + v$ si ha $\ell(f) = |P - Q|_m$: $\sum d(f(t_i, f(t_{i+1})) = \sum (t_{i+1} - t_i)|v|_m$.

Osservazione: - a livello intuitivo tale nozione *non* corrisponde alla misura dell' *immagine* di f. Piuttosto corrisponde alla misura *"della strada fatta "* su tale tracciato.
Esempio: $X = \mathbf{R}^2$, d la distanza euclidea, $f(t) = (t^2, 0)$, $\ t \in I = [-1; 1]$: si ha $Im_{[-1;1]} f = [0; 1] \times \{0\}$ segmento orizzonatle di ascissa $y = 0$. L'immagine ha "lunghezza" 1, ma la lunghezza del cammino $\ell(f)$ è 2. Infatti per $t_1 = -1$, $t_2 = 0$, e $t_3 = 1$ si ha:

$$d(f(t_1), f(t_2)) + d(f(t_2), f(t_3)) = |(-1)^2 - 0^2| + |0^2 - 1^2| = 2;$$

d'altra parte per una suddivisione arbitraria $-1 = t_1 < \cdots < t_k = 1$, essendo $f(t_1), \ldots f(t_k)$ allineati si ha:

$$\sum_{i=1}^{k-1} d((f(t_i), f(t_{i+1})) = \sum_{i \leq h, \ t_{i+1} \leq 0} d((f(t_i), f(t_{i+1})) + \sum_{i \geq h+2, \ t_i \geq 0} d((f(t_i), f(t_{i+1})) =$$
$$= ((-1)^2 - t_{h+1}^2) + |t_{h+2}^2 - t_{h+1}^2| + (1^2 - t_{h+2}^2) \leq 2.$$

Indipendenza dalla parametrizzazione 1. Se $g : J \to X$ è una riparametrizzazione di $f : I \to X$, $(g(\tau) = f(\varphi(\tau))$, $\varphi : J \to I$ debolmente monotona, continua e surgettiva) si ha $\ell(g) = \ell(f)$.
Dimostrazione: una suddivisione $\tau_1 \leq \ldots \tau_k$ di J viene trasformata per monotonia da φ in una suddivisione (eventualmente inversamente ordinata e con più "nodi" uguali) $t_1 = \varphi(\tau_1), \ldots, t_k = \varphi(\tau_k)$ di I. Pertanto $\ell(g) \leq \ell(f)$.
Viceversa data una suddivisione $t_1 < \cdots < t_k$ di I per surgettività e monotonia di φ si può scegliere una suddivisione $\tau_1, \ldots \tau_k$ "stretta' di J per cui $\varphi(\tau_i) = t_i$ e quindi vale l'opposta diseguaglianza.

Lunghezza del sostegno: - questa indipendenza dalla parametrizzazione permette definire la lunghezza di un *sottoinsieme* E di X che sia unione numerabile *disgiunta* di *sostegni di cammini semplici* f_n, $n \in \mathbf{N}$, indipendentemente da chi siano i cammini:

$$\ell(E) =: \sum_{n \in \mathbf{N}} \ell(f_n).$$

- se $\ell(E) < +\infty$ il sottoinsime si dirà 1-*rettificabile.*
Osservazione: In particolare: se E è il sostegno di un cammino $f : I \to X$ per cui $\{t \in I : \exists s \in I \ f(s) = f(t)\}$ è ordinato in successione, per esempio finito, è ben definito $\ell(E)$.

Calcolo della lunghezza per cammini cartesiani. - Se $f : I \to \mathbf{R}^m$ è un cammino C^1 sui tratti $I_1, \dots I_h$, si ha:
$$\ell(f) = \int_I |f'(t)|_m \, dt =: \sum_{j=1}^{h} \int_{I_j} |f'(t)|_m \, dt.$$

Osservazione: - Intuitivamente: - da una parte i termini $|f'(t)|\, dt$ (*rapidità* per tempo) possono essere pensati come le "lunghezze infinitesime" degli "spostamenti infinitesimi" $f'(t)\, dt$ negli intervalli "infinitesimi di tempo"dt (veloctà $f'(t)$ per tempo dt);
- dall'altra i termini $d(f(t_i), f(t_{i+1})$ le lunghezze degli "elementi discreti" di spostamento.
Passando all'estermo superiore delle somme dei secondi si otterrebbe l'integrale dei primi.
Dimostrazione. -$\leq$, è diretto: per il teorema fondamentale del calcolo integrale e per la diseguaglianza triangolare si ha per una qualsiasi suddivisione $t_0 < \dots < t_K$:
$$\sum |f(t_{i+1}) - f(t_i)|_m = \sum \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} f'(t)dt \right|_m \leq \int_I |f'(t)|_m dt,$$
Passando all'estremo superiore al variare della suddivisione si ha $\ell(f) \ \leq \ \displaystyle\int_I |f'(t)|_m \, dt$.
- $\geq$: i) si prova su un singolo tratto *limitato e chiuso* ribattezzato esso stesso $I = [a; b]$.
ii) Per il teorema fondamentale del calcolo integrale $f(\tau) - f(t) = \displaystyle\int_t^\tau f'(x)\, dx$, per $t, \ \tau \in I$;

iii) Si usa l'uniforme continuità di f' su I (Heine-Borel):
$$\text{dato } \varepsilon > 0 \text{ vi è } \delta \text{ per cui se } |t - \tau| \leq \delta \text{ allora } |f'(t) - f'(\tau)|_m \leq \varepsilon,$$
quindi per $t \leq \theta \leq \tau$ si scrive l'integrale come la derivata per la lunghezza dell'intervallino più un integrale piccolo:
$$\int_t^\tau f'(x)\, dx = (\tau - t) f'(\theta) + \int_t^\tau \left(f'(x) - f'(\theta)\right)\, dx.$$
iv) Per la diseguaglianza triangolare delle norme in $\mathbf{R}^m$ e quella per gli integrali si ha, per $0 < \tau - t < \varepsilon$, $t \leq \theta \leq \tau$:
$$|f(\tau) - f(\tau)|_m \geq (\tau - t)|f'(\theta)|_m - \int_t^\tau |f'(x) - f'(\theta)|_m \, dx \geq (\tau - t)|f'(\theta)|_m - (\tau - t)\varepsilon.$$
v) suddividendo I in sottointervalli lunghi meno di δ di estremi $t_0, \dots t_K$ per cui $0 < t_k - t_{k-1} < \delta$, e scegliendo, per Weiestrass, un $t_{k-1} \leq \theta_k \leq t_k$ per cui $|f'(\theta_k)|_m = \max\limits_{[t_{k-1}; t_k]} |f'|_m$, $1 \leq k \leq K$, si ha:
$$\sum_k |f(t_k) - f(t_{k-1})|_m \geq \sum_k (t_k - t_{k-1})|f'(\theta_k)|_m - \sum_k (t_k - t_{k-1})\varepsilon =$$
$$= \sum_k |t_k - t_{k-1}||f'(\theta_k)|_m \ - \ (b - a)\varepsilon$$
vi) Per come si sono scelti i θ_k, l'ultimo membro ha come primo addendo una somma superiore di Riemann. Quindi per definizione di integrale per ogni $\varepsilon > 0$:
$$\ell(f) \geq \sum_k |f(t_k) - f(t_{k-1})|_m \geq \sum_k |t_k - t_{k-1}||f'(\theta_k)|_m \ - \ (b - a)\varepsilon \geq$$
$$\geq \int_I |f'(x)|_m \, dx \ - \ (b - a)\varepsilon.$$
vii) Essendo ε arbitrario, ed indipendenti da esso il primo termine ed il primo addendo dell'ultimo:
$$\ell(f) \geq \int_I |f'(x)|_m \, dx.$$

Piuttosto utile è mostare che l'integrale della norma della velocità è indipendente dalla parametrizzazione senza passare per la sua eguaglianza con la lunghezza:

Indipendenza dalla parametrizzione 2. Se $\varphi : J \to I$, $t = \varphi(\tau)$, è un cambio di parametrizzazione C^1 a tratti da J ad I, e $g : J \to \mathbf{R}^m$ è la riparametrizzazione di $f : I \to \mathbf{R}^m$, anch'essa C^1 a tratti, $g(\tau) = f(\varphi(\tau))$, allora: $\displaystyle\int_J |g'(\tau)|_m \, d\tau \;=\; \int_I |f'(t)| \, dt.$

Dimostrazione: non è che la regola della derivata delle funzioni composte negli intervalli $H \subset J$ ove g e φ sono derivabili e il teorema di cambiamento di variabile:

$$\int_H |g'(\tau)|_m \, d\tau \;=\; \int_H |(f\circ\varphi)'(\tau)|_m \, d\tau \;=\; \int_H |f'(\varphi(\tau))|_m |\varphi'(\tau)| \, d\tau \;=\; \int_{\varphi(H)} |f'(t)|_m \, dt.$$

La tesi si ottiene sommando su tali intervalli H.

Misura di 1-varietà. Essendo una 1-varietà (con o senza bordo) unione numerabile disgiunta di sostegni di cammini semplici è ben definita la sua *lunghezza* o *misura* 1-*dimensionale*.

Osservazione: - I cammini C^1 a tratti su un segmento chiuso $[a; b]$ sono sempre rettificabili: infatti la norma della derivata è limitata $\sup\limits_{a \le t \le b} |f'(t)|_m \le C < \infty$, e la lunghezza del segmento è finita, per monotonia dell'integrale $\ell(f) \le C(b-a) < \infty$.

- Vi sono cammini C^1 su segmenti limitati non chiusi, ovvero non C^1 agli estremi, con lunghezza infinita: $f(t) = (2t, t^2 \sin \frac{1}{t^2})$, $0 < t \le 1$, $f(0) = (0, 0)$: $\ell(f) =$

$$= \int_0^1 \sqrt{4 + 4t^2 \sin^2 \frac{1}{t^2} + \frac{4}{t^2} \cos^2 \frac{1}{t^2} - 4 \sin \frac{2}{t^2}} dt \ge \int_0^1 \frac{2}{t} \cos \frac{1}{t^2} \, dt = \left[\frac{1}{t^2} = s \right] \int_1^{+\infty} \frac{1}{s} |\cos s| \, ds$$

$$\ge \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{1}{s} |\cos s| \, ds = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2}+k\pi}^{\frac{\pi}{2}+(k+1)\pi} \frac{1}{s} |\cos s| \, ds \ge \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} |\cos s| \, ds \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\frac{\pi}{2} + (k+1)\pi} = +\infty.$$

- D'altronde vi sono cammini definiti su illimitati e con lunghezza finita: $f(t) = (\operatorname{artan} t, 0)$, $t \in \mathbf{R}$, essendo f semplice $\ell(f) = \pi$.

Ascissa curvilinea

Parametro di lunghezza d'arco. Se $f : I \to \mathbf{R}^m$ è un cammino C^1 a tratti e $t_0 \in I$ si dice *parametro di lunghezza d'arco* o *ascissa curvilinea* da t_0 lungo f, la funzione

$$s(t) = \ell(t) = \int_{t_0}^{t} |f'(z)|_m \, dz, \;\; t \in I, \quad \ell : I \to \mathbf{R}.$$

Osservazione: - l'integrale si intende come somma degli integrali sugli intervalli ove f è derivable con continuità.

- L'immagine di ℓ su $\overset{o}{I}$ è l'intervallo $\qquad H = \left(-\displaystyle\int_{\inf I}^{t_0} |f'(z)| \, dz \; ; \; \int_{t_0}^{\sup I} |f'(z)| \, dz \right).$

- Se f è regolare a tratti si ha che $\ell : I \to \mathbf{R}$ è strettamente crescente essendo la sua derivata (tranne in numero finito di nodi) $\ell'(t) = |f'(t)|_m > 0$. Se poi f è regolare a tratti in senso forte $\ell^{-1} : H \to I$ è anch'essa C^1 a tratti $t(s) =: \ell^{-1}(s)$, $s \in H$.

Definendo $g : H \to \mathbf{R}^m$, $g(s) = f(\ell^{-1}(s))$, $s \in H$ si ha che g è C^1 a tratti, equivalente a f, ed inoltre è percorsa con rapidità costante: $|g'(s)| = 1$.

- Inoltre:
- - $g(0) = f(t_0)$,
- - se $s > 0$ ed f è *semplice*, il punto $g(s) \in \mathbf{R}^m$ è il punto sul sostegno di f che si trova a "distanza s lungo il sostegno" da $f(t_0)$ nel senso di percorrenza di f,
- - se $s < 0$ ed f è *semplice*, il punto $g(s)$ è il punto sul sostegno di f che si trova a "distanza s lungo il sostegno"da $f(t_0)$ nel senso opposto a quello di percorrenza di f,

Parametrizzazione per lunghezza d'arco. Una curva $f : I \to \mathbf{R}^m$, C^1 a tratti, si dice *parametrizzata per lunghezza d'arco* se e solo se $|f'(t)|_m = 1$, $t \in I$. Nel caso $\ell(t) = t - t_0$.

Derivazione rispetto all'ascissa curvilinea. - Nel caso f sia regolare in senso forte si ha:

$$(\ell^{-1})' = \frac{d\ell^{-1}}{ds} = \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{\frac{d\ell}{dt}} = \frac{1}{|f'|_m}.$$

- Data quindi una funzione F definita su Imf ponendo $\tilde{F}(t) = F(f(t))$ e $\tilde{\tilde{F}}(s) = F(f(t(s)))$ si ha, calcolando le funzoni di variabile t in $t(s)$: $\displaystyle \frac{d\tilde{\tilde{F}}}{ds} = \frac{d\tilde{F}}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{1}{|f'|}\frac{d\tilde{F}}{dt}.$

In breve: $$\frac{d}{ds} = \frac{1}{|f'|}\frac{d}{dt}.$$

Iterando si ottiene: $\displaystyle \frac{d^2}{ds^2} = \frac{1}{|f'|}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{|f'|}\frac{d}{dt}\right) = \frac{1}{|f'|^2}\left(- \frac{\langle f' \cdot f'' \rangle}{|f'|^2}\frac{d}{dt} + \frac{d^2}{dt^2}\right).$

- Se $g(s) = f(t(s))$, pensando alla classe di equivalenza di curve, si scrive $\frac{df}{ds}$ invece di $\frac{dg}{ds}$. Un' accortezza in questo caso potrebbe essere quella di denotare $\frac{dg}{ds}$, ovvero $\frac{df}{ds}$, con $\dot{f}$ piuttosto che con f'. Così per le derivate successive si usa $\ddot{f}$ per $\frac{d^2g}{ds^2}$.

- Se T è il versore tangente: $$\dot{f} = \frac{1}{|f'(t(s))|}f'(t(s)) = T,$$

$$\ddot{f} = \frac{dT}{ds} = \frac{1}{|f'|^2}\left(- \frac{\langle \frac{f'}{|f'|} \cdot f'' \rangle}{|f'|}f' + f''\right) = \frac{1}{|f'|^2}\left(f'' - \langle T \cdot f'' \rangle T\right).$$

Quindi *l'accelerazione normale (centripeta)* è $\vec{a}_c = |f'|^2\frac{dT}{ds} \perp T$.

- Se F è una funzione definita su Imf, $f = f(t)$, si indicheranno le derivate rispetto a t di $\tilde{F}$ semplicemente con F', e le derivate di $\tilde{\tilde{F}}$, rispetto alla lunghezza d'arco s, con $\dot{F}$, ottenendo:

$$\dot{F} = \frac{1}{|f'|}F', \ \ddot{F} = \frac{1}{|f'|^2}\left(- \frac{\langle f' \cdot F'' \rangle}{|f'|^2}f' + F''\right). \ |\dot{T}| = \frac{1}{|f'|}\left\langle T' \cdot \frac{f'' - \langle T \cdot f'' \rangle T}{|f'' - \langle T \cdot f'' \rangle T|}\right\rangle.$$

Curvatura: - posto $\kappa(s) = |\dot{T}|_m$, se $\dot{T} \neq \vec{0}$ $N(s) = \frac{1}{\kappa}\dot{T}$, $T_0 = T(0)$, $N_0 = N(0)$, $\kappa_0 = \kappa(0)$.

-Sviluppando secondo Taylor le funzioni componenti rispetto all'ascissa curvilinea a partire da $s = 0$, $f(0) = p_0$: $\displaystyle f = p_0 + T(0)s + \frac{dT}{ds}(0)\frac{s^2}{2} + o(s^2) = p_0 + sT_0 + s^2\frac{\kappa_0}{2}N_0 + o(s^2)$

- poichè $|f(s) - p_0|_m \leq s$ si ha che, se $\dot{T}(0) \neq 0$, la curva, a meno di infinitesimi superiori al secondo per $s \to 0$, giace sul piano Π_0 per p_0 e generato da T_0, N_0 ivi applicati.

- In tale piano le circonferenze, parametrizzate con s per lunghezza d'arco, *con tangente per* $s = 0$ *parallelo a* T_0, sono del tipo $\gamma(s) = p_0 + (a - r\cos\frac{s}{r})N_0 + (b + r\sin\frac{s}{r})T_0$. Si cerca, con la scelta di r, a, b, quella che meglio approssima f in p_0 per $s \to 0$. Sviluppando f e le funzioni trigonometriche:

$$\gamma(s) - f(s) = (a - r)N_0 + bT_0 + \left(r\frac{s}{r} - s\right)T_0 + s^2\left(r\frac{1}{2r^2} - \frac{\kappa_0}{2}\right)N_0 + o(s^2).$$

- Imponendo $\gamma(0) = p_0$ si ha $a = r$, $b = 0$. Imponendo che il contatto sia di ordine infinitesimo maggiore di s^2 per $s \to 0$ si ottiene $r = \frac{1}{\kappa_0}$. Per questo si dice:

• κ *curvatura*, • Π *piano osculatore*, • $\frac{1}{\kappa}$ *raggio di curvatura*, • $p_0 + \frac{N}{\kappa}$ *centro di curvatura*.

Prime nozioni sull'integrazione non orientata lungo cammini

Integrazione <u>non orientata</u> di funzioni lungo cammini. Dato un cammino $f : I \to \mathbf{R}^M$ che sia C^1 a tratti, $F : Im_I F \to \mathbf{R}^m$, si definisce

$$\int_f F\,ds \;=\; \int_I F(f(t))|f'(t)|_M dt \;=\; \left(\int_I F_1(f(t))|f'(t)|_M dt, \ldots, \int_I F_m(f(t))|f'(t)|_M dt\right) \in \mathbf{R}^m,$$

qualora siano ben definiti e convergenti gli integrali dell'ultimo membro.

<u>Osservazione:</u> - intuitivamente F rappresenta una densità per unità di lunghezza di m grandezze.
- Se I è chiuso e limitato, ed $F : Im_I f \to \mathbf{R}^m$ è continua (con la distanza euclidea di $\mathbf{R}^m$ su ImF), l'integrale è sempre ben definito.

- Nel caso la media rispetto alla lunghezza di tali grandezze $(F_1, \ldots F_m)$ su un cammino rettificabile f è data $\dfrac{1}{\ell(f)} \displaystyle\int_f F\,ds$.
Tipico esempio di media, rispetto però ad una distribuzione di massa $\rho > 0$ sul sostegno di un cammino semplice, ($M = m$, $F(x) = x\rho(x)$ cioè $F_i(x, \ldots x_m) = x_i\rho(x)$), sono le coordinate del baricentro:

$$\left(\frac{1}{\int_f \rho ds}\int_f x_1\rho\,ds, \ldots, \frac{1}{\int_f \rho ds}\int_f x_m\rho\,ds\right)$$

Teorema. - *Indipendenza dalla parametrizzaizone:* se g è una riparametrizzione di f si ha $\displaystyle\int_g F\,ds = \int_f F\,ds$.

- *Indipendenza dall'orientazione:* in particolare $\displaystyle\int_{\ominus f} F\,ds = \int_f F\,ds$.

- *Additività sui domini:* qualora siano definiti $\displaystyle\int_{f \oplus f_*} F\,ds = \int_f F\,ds + \int_{f_*} F\,ds$.

Integrazione su insiemi. - Nel caso E sia unione numerabile disgiunta di sostegni di cammini semplici f_n, $n \in N$, lungo i quali F ha integrale, qualora la serie $\displaystyle\sum \int_{f_n} F\,ds$ converga in $\mathbf{R}^m$, il suo limite sarà detto integrale di F su E. In particolare per le 1-varietà.

Prime nozioni sull'integrazione orientata lungo cammini

<u>Osservazione:</u> un elemento di $a = (a_1, \ldots, a_m) \in \mathbf{R}^m$ rappresenta almeno tre concetti diversi:
- una *posizione* in un fissato sistema cartesiano, ovvero lo stato di m grandezze ordinate;
- una *traslazione* $T(x) = a + x$, *spostamento* che associa alla posizione $(x_1, \ldots, x_m)$ la posizione $(a_1 + x_1, \ldots, a_m + x_m)$, o la *velocità* di un moto rettilineo *uniforme* $x(t) = x + a \cdot t, t \in \mathbf{R}$;
- una *funzione lineare da* $\mathbf{R}^m$ *in* $\mathbf{R}$ $L(x) = \langle x \cdot a\rangle = a_1x_1 + \cdots + a_mx_m$, per esempio una *forza* costante che associa ad uno spostamento $x = (x_1, \ldots, x_m)$ il lavoro $\langle x \cdot a\rangle = a_1x_1 + \cdots + a_mx_m$.
Queste differenti interpretazioni non son solo concettuali ma operative nel seguente senso.
Se si effettuta un cambio di coordinate lineare in $\mathbf{R}^m$ con base $B^1, \ldots B^m$, $x_i = \sum_j B_i^j y_j$, $x = By$, la posizione e lo spostamento rappresentati dalla colonna ${}^t a = {}^t(a_1, \ldots, a_m)$ nelle nuove coordinate sono espressi da $B^{-1}\,{}^t a$, come riga da $a\,{}^t B^{-1}$. Invece la funzione lineare nelle nuove coordinate viene espressa da $\langle x \cdot a\rangle = a_1x_1 + \cdots + a_mx_m = \sum_{ij} a_i B_i^j y_j$ Quindi le nuove coordinate, in riga, della forza sono espresse da aB.
Per apprezzare invece la differenza tra posizioni e spostamenti si usano i "cambi di coordinate curvilinei", non lineari, e la loro linearizzazione. Già per $m = 1$ in $\mathbf{R}$, con nuove coordinate $y = x^3$, se un moto unidimensionale è espresso nelle coordinate x da una funzione $x = f(t)$, nel secondo sistema si esprime con $y = \ f(t)^3 = g(t)$. Passando alle velocità nel primo sistema si ha $v_x = f'(t)$ nel secondo $v_y = 3x^2 f' = 3|y|^{\frac{2}{3}} v_x$: la relazione tra le velocità è diversa da quella tra le posizioni.

Campi vettoriali ed 1-forme. - Pertanto una funzione $F : D \to \mathbf{R}^m$ si dirà: nel primo caso semplicemente *funzione* a valori nello spazio cartesiano, nel secondo *campo di vettori*, ed infine *campo di funzioni lineari*, ovvero *campo di covettori* o anche 1-*forma*.
- In diversi ambiti la distinzione concettuale può esser trascurata senza effetti pratici.

Integrazione orientata di forme differenziali e campi vettoriali lungo cammini. Dato un cammino $f : I \to \mathbf{R}^M$ che sia C^1 a tratti, $V : Im_I F \to \mathbf{R}^m$, si definisce

$$\int_f V \;=\; \int_I \langle V(f(t)) \cdot f'(t) \rangle dt \;=\; \int_I (V_1(f(t))f_1'(t)dt + \cdots + V_m(f(t))f_m'(t))\; dt \in \mathbf{R},$$

qualora sia ben definito e convergente l'integrale dell'ultimo membro.

Osservazione: - intuitivamente $\int_f V$ rappresenta il lavoro del campo di forze V su un moto f. Per questo motivo l'integrazione ora definita si dice anche *lavoro* di un campo o di una 1-forma V lungo un cammino f.
- Per un cammino semplice regolare f detto $T(x)$ il versore tangente nel punto x del sostegno:

$$\int_f V \;=\; \int_f \langle V \cdot T \rangle ds.$$

- Se I è chiuso e limitato, ed $V : Im_I f \to \mathbf{R}^m$ è continua (con la distanza euclidea di $\mathbf{R}^m$ su ImF), l'integrale è sempre ben definito.

Teorema. -*Dipendenza dall'orientazione.* - Se g è una riparametrizzzione di f con *egual orientazione* allora $\int_g V \;=\; \int_f V$.
- Se g è una riparametrizzaione di f con *orientazione opposta* $\int_g V \;=\; -\int_f V$,
in particolare $\int_{\ominus F} V \;=\; -\int_f V$.
- *Additività sui domini:* qualora siano definiti $\int_{f \oplus f_*} V = \int_f V\, ds + \int_{f_*} V$.

Integrazione di 1-forme su 1-varietà orientate. Se $E \subseteq \mathbf{R}^m$ è una 1-varietà con orientazione $T : E \to S^{m-1}$si definisce $\int_{E,T} V$ come $\int_E \langle V \cdot T \rangle ds$ se quest'ultimo è ben definito.

[B] per V.Barutello et al. Analisi mat. vol. 2;

[F] per N.Fusco et al. An.Mat. due;

[FS] per N.Fusco et al. Elem. di An. Mat. due, versione semplificata.

LUNGHEZZA DI CAMMINI, INTEGRALI SU CAMMINI.

Lunghezza e parametro di lunghezza d'arco:

[FS] pagg. 164-171, 190-195;

[B] pagg. 239-242;

[F] pagg. 319-325.

Coordinate polari e sferiche:

[FS] pagg. 160-167;

[B] pagg. 261-264;

[F] pagg. 316, 317, 323, 400, 401, 516-519.

Integrazione su cammini:

[FS] pagg.171-177, 193-195;

[B] pagg. 512-522;

[F] pagg. 325-329, 347-354.

CURVATURA SCALARE, NORMALE PRINCIPALE, ACCELLERAZIONE CENTRIPETA.

[B] pagg. 242-245, 264-265;

[F] pagg. 329-334, 338-342.