Analisi Matematica II, Anno Accademico 2017-2018.
Ingegneria Edile e Architettura
Vincenzo M. Tortorelli
FOGLIO DI TEORIA n. 8, cfr. FE 1, 3, 5(parte di continuità), 8 (Es.12-16)
LIMITI, CONTINUITÀ SECONDA PARTE, COMPLETEZZA

Limiti

La definizione di limite è quella per funzioni di una variabile espressa tramite intorni o distanze: avvicinandosi ad un punto di *accumulazione* per il dominio (o andando all'infinito) lungo il dominio, senza toccare il punto di accumulazione, i valori della funzione si avvicinano sempre più ad un determinato valore: se ciò accade tale valore è un limite.
Ad una tale teoria iniziale relativamente povera corrisponde una pratica che può esser difficile a piacere, e che si basa sui limiti in una variabile e di successioni, e sopra ogni cosa sull'uso delle diseguaglianze e dei teoremi di esistenza dei limiti quali quelli dati dalla nozione di compattezza.

Limiti. Si estende quindi la definzione di limiti di funzioni di una variabile e di successioni data nei FT 4 e 5:
- se u è un punto di *accumulazione per* D, si dice che la funzione $f = f(x),\ x \in D$ tende a v lungo D per x che tende a u, se,
dette d e d' le funzioni distanza su dominio e codominio, si ha:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 \text{ per ogni } x \in D \text{ se } 0 < d(x, u) \leq \delta \text{ allora } d'(f(x), v) \leq \varepsilon,$$

$$\text{- ovvero: } \lim_{\delta\to 0} \sup_{x\in D: 0<d(x,u)\leq\delta} d'(f(x), v) = 0.$$

- ovvero se ogni palla centrata in v contiene l'immagine mediante f di una palla centrata in u e *eventualmente privata del centro* stesso u. Si possono usare diverse notazioni:

$$f(x)\to v,\ x\to u,\ x \in D, \text{ o } f(x) \xrightarrow[x\to u,\ x\in D]{} v, \text{ o anche } \lim_{x\in D,\ x\to u} f(x) = v, \text{ o anche}$$

$$\lim_{x\in D,\ x\to u} d(f(x), v) = \lim_{x\in D,\ x\to u} |f(x) - v|' = \lim_{x\in D,\ d(x,u)\to 0} d'(f(x), v) = 0.$$

<u>Osservazione:</u> si noti che nella definizione $x \neq u$. Appunto interessa il comportamento "asintotico" di f avvicinandosi a u, non l'eventuale valore $f(u)$ nel caso in cui $u \in D$.
- Se f è a valori in $\mathbf{R}^m$, per la 1) delle diseguaglianze per componenti(FT 2), f converge a v se e solo se ogni funzione o successione componente f_i, $f_{i,n}$, $1 \leq i \leq m$, converge all'omologa componente v_i di v.
<u>Osservazione:</u> se $u \in D$ è di accumulazione per D allora f è continua in u lungo D se e solo se $f(x) \xrightarrow[x\to u,\ x\in D]{} f(u)$.

<u>Osservazione.</u> Pur potendo esprimere, con qualche accorgimento, anche l'idea di "limiti all'infinito" e di limiti "divergenti" con la nozione ora data, convien elencare esplicitamente le definzioni di alcune tra queste nozioni nozioni. Per le successioni sono coerenti con la nozione corrisponendte per lo spazio metrico $(\mathbf{N}, d_{\pm\infty})$ [cfr. FT 3, 5].
Limiti all'infinito: se D *non è limitato*, si dice che la funzione $f = f(x),\ x \in D$ tende a v lungo D per x che tende all'infinito, se:

$$\text{vi è n } p \text{ per cui } \forall\varepsilon > 0\ \exists K \text{ per ogni } x \in D \text{ se } d(x, p) \geq K \text{ allora } d'(f(x), v) \leq \varepsilon,$$

ovvero se ogni palla centrata in v contiene l'immagine mediante f del complementare di una palla centrata in p. Si possono usare diverse notazioni:

$$f(x)\to v,\ d(x, p)\to\infty,\ x \in D, \text{ o } f(x) \xrightarrow[d(x,p)\to\infty,\ x\in D]{} v,\ \lim_{x\in D,\ d(x,p)\to\infty} f(x) = \lim_{x\in D,\ x\to\infty} f(x) = v, \text{ o}$$

$$\lim_{x\in D,\ d(x,p)\to\infty} d'(f(x), v) = \lim_{x\in D,\ |x-p|\to\infty} |f(x) - v|' = \lim_{x\in D,\ x\to\infty} |f(x) - v|' = 0.$$

<u>Osservazione:</u> - per la diseguaglianza triangolare il punto p è del tutto indifferente. Ogni punto andrebbe bene, in particolare lo 0.

-Se D fosse limitato si potrebbe dire che "l'infinito è isolato da D", e non avrebbe senso parlare di comportamento asintotico di f "all'infinito".
- Nel caso la funzione sia definita su tutto $\mathbf{R}$ la definizione appena sopra data significa che vi sono i due limiti per $x \to +\infty$, e per $x \to -\infty$ e sono *uguali*.
Limiti verso un insieme: - se C contiene dei punti di accumulazione di D si dice che la funzione $f = f(x),\ x \in D$ tende a v lungo D per x che tende a C, se:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ per ogni } x \in D \text{ se } 0 < dist(x, C) \leq \delta \text{ allora } d'(f(x), v) \leq \varepsilon,$$

$$\text{- ovvero: } \lim_{\delta \to 0} \sup_{x \in D: 0 < dist(x,C) \leq \delta} d'(f(x), v) = 0.$$

Si usano diverse notazioni:

$$f(x) \to v,\ x \to C,\ x \in D, \text{ o } f(x) \xrightarrow[dist(x,C)\to 0,\ x\in D]{} v,\ \lim_{x \in D,\ dist(x,C)\to 0} f(x) = \lim_{x\in D,\ x\to C} f(x) = v$$

$$\lim_{x\in C,\ x\to u} d'(f(x), v) = \lim_{x\in D,\ x\to C} |f(x) - v|' = \lim_{x\in D,\ dist(x,C)\to 0} d'(f(x), v) = 0.$$

Limiti divergenti. - Se $f : D \to \mathbf{R}$ ed u è di accumulazione per D si dice che $f \to +\infty$ ovvero che *diverge positivamente* per x che tende a u lungo D se

$$\forall H > 0\ \exists \delta \text{ per ogni } x \in D \text{ se } 0 < d(x, u) \leq \delta \text{ allora } f(x) \geq H.$$

$$\text{- ovvero: } \lim_{\delta\to 0} \inf_{x\in D: 0<d(x,u)\leq\delta} f(x) = +\infty.$$

- Analoghe le definzioni di *divergenza negativa*, di divergenza per x all'infinito o si avvicina ad un insieme.
<u>Osservazione:</u> le diverse nozioni possono quindi essere "miscelate": limiti divergenti all'infinito, limiti verso un insieme divergenti, e così via.
Convergenze uniforme, integrale e quadratica: la convergenza di funzioni a valori funzioni $(f(x))(t) = f_x(t) \sim f(x, t)$: rispetto alla distanza uniforme si dirà uniforme, rispetto alle distanze L^1, ℓ^1 integrale, e rispetto alle distanze L^2, ℓ^2 quadratica.
- Tipico esempio sono le successioni di funzioni $\{f_n(t)\}_{n\in\mathbf{N}}$ a valori funzioni limitate, o assoltamente integrabili, o a quadrato integrabile, e le successioni a due indici $\{\{x_n^m\}_{m\in\mathbf{N}}\}_{n\in\mathbf{N}}$, limitate rispetto ad m, o con serie assolutamente convergente rispetto ad m, o con serie dei quadrati convergente rispetto m.

Unicità del limite con <u>distanze</u> per la diseguaglianza triangolare:
in uno *spazio metrico* il limite se esite è unico. Per pseudo distanze se un limite esiste gli altri limiti sono a distanza nulla da lui.

Teorema Ponte. Se λ è di accumulazione per D o D è illimitato e $\lambda = \infty$ si ha:

$$\lim_{x\in D,\ x\to\lambda} f(x) = v \text{ se e solo se}$$

$$\text{per ogni successione } x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda,\ x_n \in D \setminus \{\lambda\} \text{ si ha } f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} v.$$

<u>Osservazione:</u> similmente se al posto delle successioni si usano cammini "passanti" per λ.
<u>Osservazione:</u> - il teorema ponte è utile per vedere che il limite non esiste: o si trova una successione $x_n,\ n \in \mathbf{N}$, $x_n \to \lambda$, $x_n \neq \lambda$ per cui $\nexists \lim_{n\to\infty} f(x_n)$, o due successioni $x_n,\ n \in \mathbf{N}$, $x_n \to \lambda$, $x_n \neq \lambda$ e $y_n,\ n \in \mathbf{N}$, $y_n \to \lambda$, $y_n \neq \lambda$ per cui $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(y_n)$.
- Similmente, come osservato a proposito delle funzioni continue, per vedere che il limite non esiste basta trovare A, $B \subseteq D$, λ di accumulazione per entrambi, per cui i limiti di $f(x)$ per $x \to \lambda$ lumgo A e lungo B o non esistono o sono diversi.
Limite superiore e limite inferiore. -In modo analogo, passando per le successioni, si definiscono per le funzioni a *valori reali*, il *limite superiore* e *il limite inferiore* rispettivamente come il *massimo* e il *minimo* dei *valori limite* (eventualmente infiniti) delle successioni immagine mediante f di successioni in D che si avvicinano, senza definitivamente passarci, a dove interessa fare lo studio asintotico:

$$\liminf_{x\to p,\ x\in D} f(x) = \lim_{r\to 0^+} \inf_{0<d(x,p)\leq r,\ x\in D} f(x)\ ,\quad \limsup_{x\to p,\ x\in D} f(x) = \lim_{r\to 0^+} \sup_{0<d(x,p)\leq r,\ x\in D} f(x).$$

Semicontinuità.- Una funzione si dice *semicontinua inferiormente, sci, [superiormente, scs]* in $q \in D$ se $\liminf_{x\in D,\ x\to q} f(x) \geq f(q)$ $[\limsup_{x\in D,\ x\to q} f(x) \leq f(q)]$.

Un'estensione del criterio di Weiestrass. Sia $D \subseteq \mathbf{R}^M$ *aperto*, $f : D \to \mathbf{R}$ *sci*. Se per qualche $p \in D$ si ha $\liminf_{x\in D,\ dist(x,\partial D)\to 0} f(x) \geq f(p)$, $\liminf_{x\in D,\ |x|\mapsto\infty} f(x) \geq f(p)$, allora

f ammette minimo su D.

Osservazione - Per le convergenze introdotte valgono le usuali proprietà algebriche dei limiti, e per funzioni continue, di scambio tra limite e valutazione della funzione nel punto limite.

- • Per funzioni che non siano a valori reali non ha in generale senso la permanenza del segno. Piuttosto vale l'analogo per la distanza da un fissato punto: se $f(x) \to v$, $x \to u$ e $d(v,p) > 0$ allora in un intorno opportuno di u tranne al più u, si ha $d(f(x),p) > 0$.

Limiti ed limiti iterati. ATTENZIONE! - *non è in generale vero* che data una funzione di due variabili $f(x,y)$, $D = \mathbf{R}^2$ e un punto $u = (a,b)$ nel piano cartesiano esista $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ pur esistendo uguali i due limiti iterati. Per criteri di scambio cfr. FT 9.

$\exists \lim_{x\to a} f(x,y) = l(y)$, $\exists \lim_{y\to b} f(x,y) = m(x)$, $\exists \lim_{y\to b} l(y) = \lim_{x\to z} m(x)$.

- Inoltre potrebbe esser che i due limiti iterati siano diversi : $\exists \lim_{x\to a} f(x,y) = l(y)$, $\exists \lim_{y\to b} f(x,y) = m(x)$ ma $\exists \lim_{y\to b} l(y) = l$, $\exists \lim_{x\to z} m(x) = m$ ma $l \neq m$.

-Analoga cautela va usata per i limiti di successioni di funzioni (viste come particolari funzioni di due o più variabili, di cui una è $n \in \mathbf{N}$): può essere che $\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to u} f_n(x) \neq \lim_{x\to u} \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

Successioni di Cauchy e completezza

Successioni di Cauchy: - una successione $x : \mathbf{N} \to E$, E munito della distanza d, si dice di Cauchy se $\forall\varepsilon$ vi è un $N \in \mathbf{N}$ per cui per ogni $h,\ k \geq N$ si ha $d(x_h, x_k) \leq \varepsilon$, ovvero:

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{h,\ k\geq N} d(x_h, x_k) = 0.$$

Osservazione: - si può pensare ad una successione di Cauchy come a una successioni di misure sempre più *"affidabili"*, sempre più *precise*. Le successioni convergenti sono di Cauchy.

- Due distanze metricamente equivalenti hanno le stesse successioni di Cauchy [cfr. FT 5].

Totale limitatezza: - un insieme E si dice *totalmente limitata* per d se fissato un qualsiasi raggio $\varepsilon > 0$, piccolo, E è contenuto nell'*unione di un numero finito di palle con quel raggio.*

Teorema. Una successione di Cauchy è limitata anzi ha immagine *totalmente limitata.*

Dimostrazione: da un certo indice in poi i valori della successione $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sono tutti contenuti, in una stessa palla $B(x_N, \varepsilon)$. I rimanenti sono in numero finito $x_1, \ldots x_{N-1}$. Tutti i valori della successione son contenti nella palla di centro x_N e raggio $\max\{\varepsilon, d(x_N, x_1, \ldots, d(x_N, x_{N-1}\}$. Tutti sono contenuti nell'unione $B(x_N, \varepsilon) \cup B(x_1, \varepsilon) \cup \cdots \cup B(x_{N-1}, \varepsilon)$.

Completezza. - Un insieme E è *completo* con la distanza d se e solo se ogni successione di Cauchy a valori in E *converge* a qualche elemento di E.

Esempi: - $\mathbf{N}$ con la distanza usuale è completo. $\mathbf{R}$ è completo con la distanza euclidea per costruzione. $\mathbf{Q}$ non è completo con la distanza euclidea.

- Il prodotto finito di spazi metrici completi con la distanza prodotto è completo. Basta mostralo per due spazi metrici (E,d) ed (F,D): la distanza sul prodotto $E \times F$ è $d_\times((e,f),(g,h)) = \sqrt{[d(e,g)]^2 + [D(f,h)]^2}$. Se una successione di coppie $(x_n, y_n) \in E \times F$, $n \in \mathbf{N}$ è di Cauchy per $d_\times$ per le diseguaglianze per componenti, le singole successioni x_n, y_n, $n \in \mathbf{N}$ lo sono rispetto a d e rispetto a D. Quindi per ipotesi vi sono $x \in E$ ed $y \in F$ per cui $d(x_n, x) \to 0$ e $D(y_n, y) \to 0$. Quindi $d_\times((x_n, y_n), (x,y)) \to 0$. Quindi $\mathbf{R}^m$, $\mathbf{C}$ sono completi.

- Lo spazio seminormato delle funzioni assolutamente integrabili in senso generalizzato alla Riemann-Cauchy con la norma L^1 *non è* completo. Questa è la motivazione principale per introdurre una nozione di integrabilità che comprenda più funzioni rispetto a queste. Analogamente lo spazio delle funzioni su cui è definita la seminorma L^2 non è completo.

Nota: alcune dimostrazioni dei seguenti asserti sono riportate nel penultimo paragrafo.

Teorema. Gli spazi vettoriali normati di successioni ℓ^1, ℓ^2, ℓ^∞ a valori in uno spazio vettoriale normato *completo* $(F, ||f||)$ sono spazi completi (ognuno con la rispettiva norma).

Teorema: caratterizzazioni - Se E è completo per d, un sottoinsieme F di E è completo per d se e solo se è chiuso in E.

Dimostrazione immediata.

- Un insieme E è compatto per una distanza d se e solo se è *completo e totalmente limitato* se e solo se *ogni famiglia di aperti* la cui unione lo contiene, ha una sottofamiglia *finita* con tale proprietà.

Dimostrazione non immediata, riportata solo per ricoprimenti aperti numerabili un'implicazione.

Uniforme continuità e successioni di Cauchy. Se una funzione è uniformemente continua allora *trasforma successioni di Cauchy in successioni di Cauchy.*

Dimostrazione: Se $f : (D, d) \to (F, d')$ è uniformemente continua

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall u \in D\ \forall x \in D :\ 0 < d(x, u) \leq \delta \Longrightarrow d'(f(x), f(u)) \leq \varepsilon$$

se $x_N,\ n \in N$ è di Cauchy nel dominio di f $\forall \delta > 0\ \exists N > 0\ \forall n, m \geq N \Longrightarrow d(x_n, x_m) \leq \delta$

allora interpolando δ con N $\qquad \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall m,\ n \geq\Longrightarrow d'(f(x_n), f(x_m)) \leq \varepsilon.$

Osservazione: il viceversa non è vero: $f(x) = x^2$ da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ non è uniformemente continua ma è continua. Ma in $\mathbf{R}$, completo, le successioni di Cauchy e quelle convergenti coincido. Per continutà f trasforma successioni di Cauchy in successioni di Cauchy,

Estensione di funzioni uniformemente continue. Se $f : D \to (F, d')$, $D \subseteq E$, (E, d) , (F, d') spazi metrici ed (F, d') *completo*, e f è *uniformemente continua* allora esiste *un'unica estensione continua* di f a $\overline{D}$, e risulta uniformemente continua.

Dimostrazione: - se $x \in \overline{D}$ vi è $x_n \in D$ con $x_n \to x$ per d. Essa è di Cauchy per d quindi $f(x_n)$ è di Cauchy per d', e per completezza di (Y, d') vi è $u \in F$ e $f(x_n) \to u$. Tale valore risulta indipendente dalla successione x_n che approssima x.

- - Infatti per un'altra $z_n \in D$ con $z_n \to x$ per d, vi è $v \in F$ per cui $f(z_n) \to v$ per d'.

- - D'altronde convergendo allo stesso limite per ogni $\delta > 0$ vi è m per ogni $n \geq m$
$d(x_n, z_n) \leq d(x_n, x) + d(x, z_n) \leq 2\delta$.

- - Per uniforme continuità di f dato $\varepsilon > 0$ vi è $\delta > 0$ per cui se $d(a, b) \leq 2\delta$, a, $b \in D$, si ha $d'(f(a), f(b)) \leq \varepsilon$

- - Quindi
$d'(u, v) \leq d'(u, f(x_n)) + d'(f(z_n), v) + d'(f(x_n), f(z_n)) \leq d'(u, f(x_n)) + d'(f(z_n), v) + \varepsilon \to \varepsilon$
per $n \to \infty$, quindi $d'(u, v) = 0$, essendo lo spazio metrico $u = v$.

- Si pone $F(x) = u$: essa estende f per costruzione, con egual argomento si prova che è uniformemente continua su $\overline{D}$. Se poi g è un'estensione continua di f a $\overline{D}$, per $x \in \overline{D}$ $x_n \in D$ con $x_n \to x$, si ha $g(x_n) \to g(x)$, e $g(x_n) = f(x_n) \to F(x)$. Per unicità del limite in spazi metrici si conclude.

Limiti uniformi di funzioni uniformemente continue. il limite uniforme di funzioni uniformemente continue è uniformemente continuo.

Dimostrazione: siano $f_n : E \to F$, $n \in \mathbf{N}$, *uniformemente continue* tra (E, d) ed (F, D) spazi metrici. Sia $fE \to F$ il loro limite uniforme: $d_{unif}(f_n, f) = \sup_{x \in E} D(f_n(x), f(x)) \to 0$.

-
$$\begin{aligned} D(f(x), f(y)) &\leq D(f(x), f_n(x)) + D(f_n(x), f_n(y)) + D(f_n(y), f(y)) \leq \\ &\leq 2d_{unif}(f_n, f) + D(f_n(x), f_n(y)). \end{aligned}$$

- Dato $\varepsilon > 0$: - - per convergenza uniforme sia N per cui $2d_{unif}(f_N, f) \leq \varepsilon$,

- - per uniforme continuità di f_N sia $r = r_N > 0$ per cui $d(x, y) \leq r\ \Rightarrow\ D(f_N(x), f_N(y)) \leq \varepsilon$.

$$\text{Quindi dato } \varepsilon > 0 \text{ per tale } r \text{ si ha } \sup_{(x,y),\, d(x,y) \leq r} D(f(x), f(y)) \leq 3\varepsilon.$$

Corollario: l'insieme delle funzioni uniformemente continue limitate con la distanza uniforme è un sottoinsime chiuso delle funzioni continue limitate.

Teorema Siano (E, d) ed (F, D) due spazi metrici. Si denotino con $\mathcal{B}((E, d), (F, D))$ l'insieme delle funzioni *limitate*, e con $C_{\mathcal{B}}((E, d), (F, D))$ quello delle funzioni *continue e limitate*.
1)Se una successione di funzioni continue $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ è di Cauchy per la distanza uniforme è *equicontinua*: dato $x \in E$ si ha $\sup_{n\in\mathbf{N}} \sup_{y\in B_d(x,r)} D(f_n(x), f_n(y)) \xrightarrow[r\to 0^+]{} 0$

2) $C_{\mathcal{B}}((E, d), (F, D))$ è un sottoinsieme chiuso dello spazio metrico $\mathcal{B}((E, d), (F, D))$ con la distanza uniforme. Equivalentemente la funzione *limite uniforme di funzioni continue è continua*, se limitate limitata.
3) Lo spazio metrico delle funzioni limitate, $(\mathcal{B}(A, (F, D)), d_{Unif})$, con la distanza uniforme, definite su un qualsiasi insieme A a *valori* in un spazio metrico *completo* (F, D) è completo.
Corollario: se (F, D) è completo lo è anche lo spazio metrico $(C_{\mathcal{B}}((E, d), (F, D)), d_{Unif})$.

Nota: Un importante criterio sia per la teoria che per valutazioni numeriche è:

Teorema delle contrazioni: (versione "soft"). Se $f : E \to E$, E con distanza d, e vi è $L \in [0; 1)$, $L < 1$ per cui $d(f(x), f(y)) \le Ld(x, y)$, f si dice *contrazione in* E, allora
- per ogni $p \in E$ la successione di elementi di E: $x_0(p) = p$, $x_1 = f(p)$, $x_{n+1}(p) = f(x_n(p))$ $(n \in \mathbf{N})$ è di Cauchy. La stima dell'acuratezza si esplicita: $d(x_n, x_m) \le L^m \dfrac{d(f(p), p)}{1-L}$, $n \ge m$
- Se (E, d) è anche *completo* per d allora x_n è convergente a un punto $\lambda(p)$ di E.
- Tale limite non dipende dal dato iniziale p ed è *l'unico punto fisso* di f: $f(\lambda) = \lambda$.

Spazi di Banach. Uno spazio vettoriale completo per la distanza indotta da una norma si dice di Banach per la norma in questione.

Usando la completezza, lo stesso argomento con cui si dimostra che una *serie di numeri reali assolutamente convergente è convergente* prova il seguente criterio di convergenza di serie in norma per spazi di Banach:

Convergenza totale - In un spazio vettoriale V con norma $\|\cdot\|$, data una successione di "addendi" $v_n \in V$, $n \in N$ se la serie di numeri non negativi $\sum_{n=0}^{\infty} \|v_n\|$ è finita allora la successione delle somme parziali $S_N =: \sum_{n=0}^{N} v_n \in V$ è di Cauchy per la norma.

- Se B è uno spazio di Banach per la norma $\|\cdot\|$ e $\sum_{n=0}^{\infty} \|v_n\| < \infty$ allora vi è il limite $\sum_{n=0}^{\infty} v_n \in B$.

Spazi di Hilbert. sono gli spazi con *prodotto scalare, completi* per le distanze indotte.
Osservazione: - gli esempi fondamentali di spazi di Hilbert sono gli spazi cartesiani $\mathbf{R}^m$ muniti del prodotto scalare euclideo dato dalla somma delle coordinate omologhe.

- Come enunciato, $\ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R})$, con il prodotto scalare $\langle x \cdot y\rangle_{\ell^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)y(n)$, è uno spazio di Hilbert, rendendolo la distanza associata completo.
- Le funzioni integrabili alla Riemann sui limitati ove siano limitate, con quadrati di integrale in senso generalizzato finito, con il prodotto $\langle f \cdot g\rangle_{L^2} = \int f(x)g(x)\,dx$, *non sono uno spazio completo*, cfr. FT 3.
- Per ottenere la completezza sia delle distanze L^1, che di queste distanze L^2 è necessario introdurre un concetto più generale di integrale e di funzione integrabile che estende quello in senso generalizzato di Riemann per funzioni per cui anche il valore assoluto (per L^1) sia con integrale finito, o il cui quadrato (per L^2) con integrale finito.
- Con questa estensione, che rende completa la pseudo distanza L^2, l'anolgia con la geometria euclidea si rafforza permettendo, per esempio, di avere sempre la proiezione di minima distanza L^2 (ortogonale per il prodotto scalare) di una funzione L^2 su un un sottospazio vettoriale L^2-chiuso.

Dimostrazioni rimanenti

Teorema. Gli spazi vettoriali normati di successioni ℓ^1, ℓ^2, ℓ^∞ a valori in uno spazio vettoriale normato *completo* $(F, ||f||)$ sono spazi completi (ognuno con la rispettiva norma).

Dimostrazione: La dimostrazione per ℓ^∞ è più semplice ma essendo conseguenza dei prossimi teoremi non si espone direttamente. Si lascia come esercizio.

- L'argomento per ℓ^1 è lo stesso che per ℓ^2 ma più diretto. Per ℓ^2 si lascia come esercizio. Sia quindi $x^m = (x^m(1), x^m(2)\dots) = (x^m(n))_{n\in\mathbf{N}}$, $m \in \mathbf{N}$ una successione di Cauchy di successioni a valori in (F, D) *completo*. Cioè dato $\varepsilon > 0$ vi è $M \in \mathbf{N}$ per cui se $m,\ \mu \geq M$ si ha: $$||x^m(n) - x^\mu(n)|| \leq |x^m - x^\mu|_{\ell^1} = \sum_{n=0}^{\infty} ||x^m(n) - x^\mu(n)|| \leq \varepsilon.$$

1) Ne segue in particolare l'esistenza dei *limiti puntuali*. Infatti fissato $n \in \mathbf{N}$ la successione, di variabile m, di elementi di F data da $(x^m(n))_{m\in\mathbf{N}}$ è di Cauchy per $||\cdot||$. Per completezza di $(F, ||\cdot||)$ segue: vi è $y(n) \in F$ per cui $x^m(n) \xrightarrow[m\to\infty]{||\cdot||} y_n$ $\quad (||x^m(n) - y(n)|| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0)$.

2) Come successione in ℓ^1, la $(x^m)_{m\in\mathbf{N}}$, essendo di Cauchy, è limitata: per cui vi è $R \in \mathbf{R}$ per cui $\sup\limits_{m\in\mathbf{N}} |x^m|_{\ell^1} \leq R$. Da questo segue che la successione $y = (y(n))_{n\in\mathbf{N}}$ sta in ℓ^1: per ogni $n \in \mathbf{N}$ e $m \in \mathbf{N}$ per la diseguaglianza triangolare per $||\cdot||$:
$$\sum_{n=0}^{N} ||y(n)|| \leq \sum_{n=0}^{N} ||y(n) - x^m(n)|| + \sum_{n=0}^{N} ||x^m(n)|| \leq \sum_{n=0}^{N} ||y(n) - x^m(n)|| + R$$
fissato N, essendo la seconda una sommma finita di infinitesimi , passando al limite per $m \to \infty$, si ottiene $$\sum_{n=0}^{N} ||y(n)|| \leq R \text{ quindi per } N \to \infty \ \ |y|_{\ell^1} \leq R < \infty$$

3) Prendendo $\mu = M$ si ha per ogni $m \geq M$ che $|x^m - x^M|_{\ell^1} \leq \varepsilon$, e come sopra si ha per ogni N e per ogni $m \geq M$
$$\sum_{n=0}^{N} ||y(n) - x^M(n)|| \leq \sum_{n=0}^{N} ||y(n) - x^m(n)|| + \sum_{n=0}^{N} ||x^m - x^M(n)|| \leq \sum_{n=0}^{N} ||y(n) - x^m(n)|| + \varepsilon$$
fissato N, essendo la seconda una sommma finita di infinitesimi, passando al limite per $m \to \infty$, si ottiene $$\sum_{n=0}^{N} ||y(n) - x^M(n)|| \leq \varepsilon \text{ quindi per } N \to \infty \ \ |y - x^M|_{\ell^1} \leq \varepsilon.$$

Teorema: caratterizzazioni - Se E è completo per d, un sottoinsieme F di E è completo per d se e solo se è chiuso in E. Dimostrazione immediata.

- Un insieme E è sequenzialmente compatto per una distanza d se e solo se
è *completo e totalmente limitato* se e solo se
ogni famiglia di aperti con unione che lo ricopre, ha una sottofamiglia *finita* che lo ricopre.

Dimostrazione la seconda equivalenza per ricoprimenti numerabili: - si dimostra che: $\hat{R}$ è un sequenzialmente compatto in uno spazio metrico se e solo se per ogni *successione* di aperti $\widetilde{R}^k$, $k \in \mathbf{N}$, che lo ricopre, vi è una sottofamiglia finita di questi aperti che ancora lo ricopre.

- Si considerano i seq. compatti (chiusi in un seq. compatto) decrescenti $C_n = \hat{R} \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \widetilde{R}^k$, $\bigcap \downarrow C_n = \emptyset$. Se non vi fosse nessun sottoricoprimento finito allora ogni $C_n \neq \emptyset$. Se ciò fosse sia $x_n \in C_n$. Per sequenziale compattezza di $\hat{R}$ vi è $x_{n_h} \to x$: poichè $x_{n_h} \in C_{n_h} \subseteq C_n$ per ogni $n \leq n_h$, ed essendo i C_n chiusi, deve essere $x \in C_n$, per ogni $n \in \mathbf{N}$: assurdo.

- Viceversa dato $\hat{R}$ con la proprietà del sottoricoprimento di aperti finito e $x_n \in \hat{R}$, $n \in \mathbf{N}$ senza sottosuccessioni convergenti in $\hat{R}$. In particolare ogni valore può essere assunto per un numero finito di n. Inoltre la sua immagine $I = \{x_n : n \in \mathbf{N}\}$, *infinita*, sarebbe *chiusa in* $\hat{R}$, e per ogni n vi sarebbe $r_n > 0$ per cui $B(x_n, r_n)$ non contiene se non un numero finito di altri x_m, $m \neq n$. Quindi $\hat{R} \subseteq (\hat{R} \setminus I) \bigcup B(x_n, r_n)$ unione numerabile di aperti. Quindi vi sarebbe $\hat{n} \in \mathbf{N}$: $I \subseteq \hat{R} \subseteq (R \setminus I) \cup B(x_1, r_1) \cup \dots \cup B(x_{\hat{n}}, r_{\hat{n}})$. Una delle palle, in numero *finito*, deve contenere x_n per infiniti $n \in \mathbf{N}$, essendo I *infinito*. Assurdo.

Teorema Siano (E, d) ed (F, D) due spazi metrici. Si denotino con $\mathcal{B}((E, d), (F, D))$ l'insieme delle funzioni *limitate*, e con $C_{\mathcal{B}}((E, d), (F, D))$ quello delle funzioni *continue e limitate*.
1)Se una successione di funzioni continue $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ è di Cauchy per la distanza uniforme è *equicontinua*: dato $x \in E$ si ha $\sup_{n\in\mathbf{N}} \sup_{y\in B_d(x,r)} D(f_n(x), f_n(y)) \xrightarrow[r\to 0^+]{} 0$

2) $C_{\mathcal{B}}((E, d), (F, D))$ è un sottoinsieme chiuso dello spazio metrico $\mathcal{B}((E, d), (F, D))$ con la distanza uniforme. Equivalentemente la funzione *limite uniforme di funzioni continue è continua*, se limitate limitata.
3) Lo spazio metrico delle funzioni limitate, $(\mathcal{B}(A, (F, D)), d_{Unif})$, con la distanza uniforme, definite su un qualsiasi insieme A a *valori* in un spazio metrico *completo* (F, D) è completo.

Corollario: se (F, D) è completo lo è anche lo spazio metrico $(C_{\mathcal{B}}((E, d), (F, D)), d_{Unif})$.

Dimostrazione: 1) sia $f_n,\ n \in \mathbf{N}$ è una successione di funzioni continue di Cauchy uniformemente, cioè per la distanza uniforme: dato ε vi è N per cui se $n,\ m \geq N$

$$d_{Unif}(f_n, f_m) = \sup_{x\in E} D(f_n(x), f_m(x)) \leq \varepsilon.$$

Dato $x \in E$ per $n \geq N$ si ha:
$D(f_n(x), f_n(y)) \leq D(f_n(x), f_N(x)) + D(f_n(y), f_N(y)) + D(f_N(x), f_N(y)) \leq 2\varepsilon + D(f_N(x), f_N(y))$,

quindi per continuità delle prime N funzioni vi è $r > 0$ per cui per tutti i $k \leq N$ se $d(x, y) \leq r$ allora $D(f_k(x), f_k(y)) \leq \varepsilon$. Ne segue: per ogni $n \in \mathbf{N}$ per tali y si ha $D(f_n(x), f_n(y)) \leq 3\varepsilon$.
2) - f_n $n \in \mathbf{N}$ è una successione di funzioni continue che converge uniformemente ad una funzione f: cioè per la distanza uniforme. In particolare vi è convergenza *puntuale*: dato $x \in E$ si ha $0 \leq D(f(x), f_n(x)) \leq \sup_{y\in E} D(f(y), f_n(y)) \to 0$.
- Va provata la continuià di f: dato $x \in E$ per diseguaglianza triangolare per ogni $n,\ y$:
$D(f(x), f(y)) \leq D(f_n(x), f(x)) + D(f_n(y), f(y)) + D(f_n(x), f_n(y)) \leq 2d_{Unif}(f_n, f) + D(f_n(x), f_n(y))$.

Essendo f_n di Cauchy uniformemente, poichè convergente uniformemente, dato $\varepsilon > 0$ vi è $r > 0$ non dipendente da n per cui $\sup_{d(x,y)\leq r} \sup_{n\in\mathbf{N}} D(f_n(y), f_n(x)) \leq \varepsilon$. Ergo per $d(x, y) < r$:
$D(f(x), f(y)) \leq 2d_{Unif}(f_n, f) + 3\varepsilon$, per $n \to \infty$: se $d(x, y) < r$ allora $D(f(x), f(y)) \leq 3\varepsilon$.
3) È parte dell'argomento usato per ℓ^1. Data una $g_n,\ n \in \mathbf{N}$ successione di funzioni limitate, definite su A a valori nello spazio metrico completo (F, D), che sia di Cauchy uniformemente: dato $\varepsilon >$ vi è $M_\varepsilon \in \mathbf{N}$ per cui se $m,\ n \geq M$

$$D(g_n(x), g_m(x)) \leq \sup_{x\in A} D(g_n(x), g_m(x)) = d_{Unif}(g_n, g_m) \leq \varepsilon;$$

i) ne segue per completezza di (F, D) che esite il limite puntuale: per ogni $x \in A$ vi è $g(x) \in F$ per cui $D(g_n(x), g(x)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
ii) Inoltre l'insieme delle g_n è limitato per la distanza uniforme: cioè è una famiglia di funzioni uniformemente limitata in (F, D): per qualche $z \in F$ ed $R \in \mathbf{R}$ si ha $\sup_{n\in\mathbf{N}} \sup_{x\in A} D(f_n(x), z) \leq R$.
Ne segue che la funzione g è limitata:
$D(g(x), z) \leq D(g_n(x), g(x)) + D(g_n(x), z) \leq D(g_n(x), g(x)) + R \xrightarrow[n\to\infty]{} R$.
iii) ne segue altresì la convergenza uniforme delle g_n a g: per $m = M_\varepsilon$ e $n \geq M_\varepsilon$:

$$D(g, g_M) \leq D(g, g_n) + D(g_n, g_M) \leq D(g, g_n) + \varepsilon \xrightarrow[n\to\infty]{} \varepsilon.$$

Teorema delle contrazioni: (versione "soft"). Se $f : E \to E$, E con distanza d, e vi è $L \in [0; 1)$, $L < 1$ per cui $d(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y)$, f si dice *contrazione in* E, allora
- per ogni $p \in E$ la successione di elementi di E: $x_0(p) = p$, $x_1 = f(p)$, $x_{n+1}(p) = f(x_n(p))$ $(n \in \mathbf{N})$ è di Cauchy. La stima dell'acuratezza si esplicita: $d(x_n, x_m) \leq L^m \dfrac{d(f(p), p)}{1 - L}$, $n \geq m$
- Se (E, d) è anche *completo* per d allora x_n è convergente a un punto $\lambda(p)$ di E.
- Tale limite non dipende dal dato iniziale p ed è *l'unico punto fisso* di f: $f(\lambda) = \lambda$.

Dimostrazione:
- 1) $d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq Ld(x_n, x_{n-1}) \leq \cdots \leq L^n d(x_1, x_0) = L^n d(f(p), p)$.
- 2) se $n > m$, $n = m + k + 1$, si ha

$$d(x_n, x_m) = d(x_{m+k+1}, x_m) \leq d(x_{m+k+1}, x_{m+k}) + d(x_{m+k}, x_{m+k-1}) + \cdots + d(x_{m+1}, x_m) \leq$$
$$\leq (L^{k+m} + \cdots + L^m) d(f(p), p) = d(f(p), p) \sum_{h=m}^{n-1} L^h.$$

3) Essendo $0 \leq L < 1$ è $\displaystyle\sum_{h=0}^{\infty} L^h = \frac{1}{1-L} < +\infty$. Ovvero la successione delle somme parziali $\displaystyle\sum_{h=0}^{n-1} L^h = \frac{1-L^n}{1-L}$ è convergente. Quindi è di Cauchy in $\mathbf{R}$: dato $\varepsilon > 0$ vi è N per $n,\ m > N$:

$$\varepsilon \geq \sum_{h=m}^{n-1} L^h = |S_{n-1} - S_{m-1}| \geq d(x_n, x_m).$$

- Dati due dati iniziali diversi $p,\ q$, per gli eventuali due limiti si ha usando due volte la diseguaglianza triangolare:

$d(\lambda(p), \lambda(q)) \leq d(\lambda(p), x_n(p)) + d(x_n(p), x_n(q)) + d(x_n(q), \lambda(q)) \leq d(\lambda(p), x_n(p)) + L^n d(p, q) + d(x_n(q), \lambda(q)) \to 0$ per $n \to \infty$, cioè $d(\lambda(p), \lambda(q)) \leq 0$, essendo in uno spazio metrico $p = q$.

Altri esempi

Esempio 1: per $f(x, y) = x^y + y^x,\ x > 0,\ y > 0$ non esiste il limite per $(x, y) \to (0, 0)$, mentre esistono e sono uguali i due limiti iterati $\lim_{x\to 0^+} \lim_{y\to 0^+} f(x, y) = \lim_{y\to 0^+} \lim_{x\to 0^+} f(x, y)$.

Esempio 2: $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, $(x, y) \neq (0, 0)$ non ha limite per $(x, y) \to (0, 0)$: $f(0, t) = -1$, $f(s, 0) = 1$, su due cammini che si avvicinano a $(0, 0)$ ha limiti diversi.

Esempio 3: - $f(x, y, z) = \dfrac{x^2 + y + z}{x^2 + y^2 + z^2}$, $\nexists \lim_{x^2+y^2+z^2\to\infty} f$: $f(x, 0, 0) = 1$, $f(0, 0, z) = \dfrac{1}{z} \xrightarrow[|z|\to\infty]{} 0$.

Per funzioni di più variabili spesso è utile usare sistemi di cooridnate curvilinei. Per esempio quelle polari in $\mathbf{R}^2$ o sferiche che le esteendono ad $\mathbf{R}^N$:
$\mathbf{G} : [0, \infty[\, \times [-\pi, \pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]^{N-2} \to \mathbf{R}^N$: $\mathbf{G}(\rho, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{N-1}) = \mathbf{x}$ definita induttivamente da

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \rho \hat{\mathbf{r}}_N = \rho(\cos\vartheta_{N-1} \hat{\mathbf{r}}_{N-1}, \sin\vartheta_{N-1}) \\ \\ \hat{\mathbf{r}}_2 = (\cos\vartheta_1, \sin\vartheta_1) \end{cases} \qquad (\rho = |\mathbf{x}|_N = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_N^2}).$$

Per $\mathbf{R}^3$, $\vartheta_1 =: \varphi \in [-\pi; \pi]$, $\vartheta_2 =: \vartheta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$: $\qquad (x, y, z) = \rho(\cos\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta\sin\varphi, \sin\vartheta)$.

Esempio 4: $\dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, $(x, y) \neq (0, 0)$ non ha limite $(x, y) \to (0, 0)$: in coordinate polari $f = \dfrac{1}{2}\sin 2\varphi$, restrigendosi alle semiretta da $(0, 0)$ $\varphi = 0$ e $\varphi = \frac{\pi}{4}$ si ottengono limiti diversi.

Esempio 5: $f(x, y) = \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^4}$, $(x, y) \neq (0, 0)$ non ha limite per $(x, y) \to (0, 0)$: invece delle coordinate polari (cioè linee coordinate che sono cerchi e semirette) è bene utilizzare come linee, per l'origine, le parable poichè la funzione su di esse è costante $f(x, y) = \dfrac{\frac{y}{x^2}}{1 + \frac{y^2}{x^4}}$.

Esempio 6, uso limiti di una variabile: $f(x, y, z, w) = \dfrac{e^{x^2yzw} - xz\sin xyw - 1}{(x^2 + y^2 + z^2 + w^2)^4} =$

Taylor per $\begin{cases} e^s \\ \sin t \end{cases}$

$$= \frac{1 + x^2yzw + O(\rho^{10}) - xzxyw + O(\rho^{11}) - 1}{\rho^8} = \frac{O(\rho^{10})}{O(\rho^8)} \xrightarrow[(x,y,z,w)\to(0,0,0,0)]{} 0.$$

[B] per V.Barutello et al. Analisi mat. vol. 2;

[F] per N.Fusco et al. An.Mat. due;

[FS] per N.Fusco et al. Elem. di An. Mat. due, versione semplificata.

SPAZI ASTRATTI: METRICI, VETTORIALI NORMATI, CON PRODOTTO SCALARE:

[B] cap. IV.3 pagg.178-180; cap.IV.3 Esem.(IV.88) pagg. 210-211 (funzioni trigonometriche e prodotto scalare L2); cap. VII par. da 1 a 5 pagg. 331-348, in particolare distanze L1 ed uniforme nel piano pag.3332, per funzioni continue pag. 333-334 e distanza L2.

[F] cap. 1.8 formule da (8.10) a(8.12) pagg.53-53; cap.2 pagg 75-120 in particolare: formula (15.6) pag. 83, distanza uniforme per funzioni continue Esem. 4 pag. 79, distanze Lp negli spazi cartesiani pagg.96-97.